DS1 (version B) / 156

Exercice 1 /36

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t.
Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

- **2 pts : calcul du rang de** T
- **1 pt : en déduire** $\mathrm{Sp}(t)$
- **3 pts :** $E_0(t)$ **(1 pt pour l'écriture du système / 1 pt pour la résolution / 1 pt pour** $\mathrm{Ker}(t)$**)**
- **1 pt :** $\dim(E_0(t)) = 1$
- **2 pts :** $E_1(t)$ **et** $\dim(E_0(t)) = 1$ **(on accepte « comme précédemment »)**
- **1 pt :** t **non diagonalisable**
- **1 pt :** t **non bijectif**

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.
Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

- pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.

- **2 pts**

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

- **2 pts :** $\mathrm{rg}(t) = 2$
- **1 pt : expression théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Ker}(t)) = 2n - 1$

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

- **1 pt :** 0 **est valeur propre de** t **et** $\dim(\mathrm{Ker}(t)) = 2n - 1$
- **1 pt : introduction d'une famille** $\mathcal{E}$
- **2 pts :** $\mathcal{E}$ **est libre**
- **1 pt :** $\mathcal{E}$ **est une base de** $\mathrm{Ker}(t)$ $(\mathrm{Card}(\mathcal{E}) = 2n - 1 = \dim(\mathrm{Ker}(t)))$

3. Montrer que $\mathrm{Im}(t \circ t) \subset \mathrm{Im}(t)$, où $\mathrm{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

- 2 pts

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$
Établir que $\mathscr{B} = \left(e_1, \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

- 1 pt : e_1 **et** $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i$ **sont des éléments de** $\mathrm{Im}(t)$

- 1 pt : $\mathscr{B}$ **est libre**

- 1 pt : $\mathscr{B}$ **est une base de** $\mathrm{Im}(t)$ $(\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Im}(t)\big))$

- 2 pts : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\tilde{t}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(1 pt pour chaque colonne)**

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

- 2 pts

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

- 0 pt : 0 **est valeur propre de** t

- 1 pt : toute valeur propre non nulle de t **est valeur propre de** $\tilde{t}$

- 1 pt : 1 **est la seule valeur propre non nulle possible de** t **(car seule valeur propre de** $\tilde{t}$**)**

- 1 pt : $E_1\left(\tilde{t}\right) = E_1(t)$

- 1 pt : $\dim(E_1\left(\tilde{t}\right)) = 1$ **(car sinon** N **serait scalaire)**

- 1 pt : t **n'est pas diagonalisable**

Exercice 2 /70

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série /43

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

- 1 pt : pour penser à la disjonction de cas (bonus)
- 1 pt : cas $x = 0$
- 1 pt : cas $x < 0$ ($\sum\ u_n$ (grossièrement) divergente)

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

- 1 pt : $u_{2(p+1)} - u_{2p} = \dfrac{1}{(2p+1)^x} - \dfrac{1}{(2p+2)^x}$
- 1 pt : $u_{2(p+1)} - u_{2p} \geqslant 0$
- 1 pt : $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = -\dfrac{1}{(2p)^x} + \dfrac{1}{(2p+1)^x}$
- 1 pt : $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} \leqslant 0$
- 1 pt : $u_{2p} - u_{2p-1} = -\dfrac{1}{(2p)^x} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- 1 pt : conclusion

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

- 3 pts : théorème de recouvrement

c) Justifier alors que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

- 1 pt : la suite (u_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{1+n}}{n^x}$.

d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

- 1 pt : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2p} \leqslant u_{2(p+n)}$ **car** (u_{2p}) **est croissante**
- 1 pt : par passage à la limite $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p} \leqslant S(x)$
- 1 pt : de même $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ S(x) \leqslant u_{2p+1}$
- 1 pt : $u_{2p+1} = u_{2(p+1)-1} \leqslant u_{2p-1}$ **car** (u_{2p-1}) **est décroissante**

e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
On pourra séparer les cas n pair et n impair.

- 1 pt : écriture $n = 2p$
- 1 pt : $0 \ \leqslant\ S(x) - u_{2p} \ \leqslant\ u_{2p+1} - u_{2p}$
- 1 pt : $u_{2p+1} - u_{2p} \ =\ \dfrac{(-1)^{(2p+1)+1}}{(2p+1)^x} \ =\ \dfrac{1}{(2p+1)^x} \ =\ \dfrac{1}{(n+1)^x}$
- 0 pt : écriture $n = 2p - 1$
- 1 pt : $u_{2p} - u_{2p-1} \ \leqslant\ S(x) - u_{2p-1} \ \leqslant\ 0$
- 1 pt : $u_{2p} - u_{2p-1} \ =\ \dfrac{(-1)^{(2p)+1}}{(2p)^x} \ =\ -\dfrac{1}{(2p)^x} \ =\ -\dfrac{1}{(n+1)^x}$

f) En déduire une fonction **Scilab** qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

- **1 pt : u_{n_0} valeur approchée de $S(x)$ à ε signifie :** $|S(x) - u_{n_0}| \leqslant \varepsilon$
- **1 pt :** $|S(x) - u_{n_0}| \leqslant \dfrac{1}{(n_0+1)^x} \leqslant \varepsilon$
- **1 pt : raisonnement par équivalence** $n_0 = \left\lceil \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right\rceil$
- **4 pts : 1 pt structure `function`, 1 pt `n = ceil((1 / epsilon) ^ (1 / x) - 1)`, 2 pts boucle `for`**

3. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$ puis :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{\substack{k \in [\![1,2p]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} + \sum_{\substack{k \in [\![1,2p]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = -\frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} = \sum_{\substack{k \in [\![1,2p]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} + \sum_{\substack{k \in [\![1,2p]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} = -\frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$
- **1 pt : pour toute tentative de séparation pair / impair même infructueuse (bonus pour ceux qui ont réussi)**

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question *3.* : $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

- **1 pt : en appliquant l'égalité de la question précédente pour $x = 1$ et $p = n$,** $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
- **1 pt :** $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

- **1 pt : reconnaître une somme de Riemann** $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
- **1 pt : convergence de la somme** $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$
- **1 pt : calcul** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = \ln(2)$
- **1 pt :** $S(1) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(2)$

5. On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

- **1 pt : on applique l'égalité de la question *3.* avec les paramètres $x = 2$ et $p = n$**

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad = \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

- **1 pt : passage à la limite**

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale /27

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in\,]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt$.
On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\, dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\, dt$.

- **1 pt : $f : t \mapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^t}$ est continue sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : découpage en deux intégrales (convergence si et seulement si il y a convergence des deux intégrales)**
- **3 pts : convergence sur $]0,1]$ ($\geqslant 0$, $\underset{x\to 0}{\sim}$, intégrale de Riemann d'exposant -1)**
- **3 pts : convergence sur $[1,+\infty[$ ($\geqslant 0$, $\underset{x\to 0}{o}$, intégrale de Riemann d'exposant 2)**

7. Soit $x \in\,]-1;+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0;+\infty[,\ t \mapsto \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g_x(t) = (-1)^n\, g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt} + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, t^x\, \mathrm{e}^{-kt}$.

- **1 pt : somme géométrique**
- **1 pt : formule valable car $-\mathrm{e}^{-t} \neq 1$**
- **1 pt : calcul**

b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\, \mathrm{e}^{-kt}\, dt$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x\, \mathrm{e}^{-kt}\, dt = \frac{1}{k^{x+1}}\, \Gamma(x+1)$$

- **3 pts : changement de variable (poser $u = kt$ / changement de variable valide car φ de classe $\mathcal{C}^1$ / calcul)**
- **1 pt : conclusion**

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

- **3 pts : critère de comparaison (inégalité)**
- **2 pts : encadrement / croissance de l'intégration**
- **1 pt : conclusion (limite nulle)**

d) En déduire la relation : $I(x) = S(x+1)\,\Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la Partie **I**.

- 1 pt : intégration de part et d'autre de l'égalité

- 1 pt : $(-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

- 1 pt : série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{x+1}}$ **converge car** $x+1>0$

- 1 pt : passage à la limite

8. En utilisant la Partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.

- 1 pt : utilisation possible du résultat précédent car $x = 1 \in \,]-1, +\infty[$

- 1 pt : conclusion $I(1) = \dfrac{\pi^2}{12}$

Exercice 3 /...

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f /...

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\ \big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big)$$

- **1 pt : la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où ...**
- **1 pt : f_1 dérivable sur $]0,1[$ comme composée ...**
- **1 pt : calcul**

2. ***a)*** Justifier : $\forall t \in]0,1[,\ t\,\ln(t) < 0$.

- **1 pt : $\forall t \in]0,1[$, $\ln(t) < 0$ et multiplication par $t > 0$**

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

- **1 pt : $x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de la quantité $-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)$**
- **1 pt : $x\,\ln(x) < 0$**
- **1 pt : $(1-x)\,\ln(1-x) < 0$ en utilisant la propriété précédente en $t = 1-x \in]0,1[$**

3. ***a)*** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

- **1 pt : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$**
- **1 pt : on prolonge f en posant $f(0) = 0$**

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

- **1 pt : écriture de $\tau_0(f)(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\ln(1-x)}{x\,\ln(x)}$**
- **1 pt : $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$**

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

- **1 pt : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = +\infty$**
- **1 pt : ainsi la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f**

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

- **1 pt : la droite d'équation $x = 1$ apparaît**
- **1 pt : tangente horizontale en $(0,0)$**
- **1 pt : respect des variations et limites**
- **1 pt : propreté générale**

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

- **1 pt : $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car est une fonction polynomiale (de degré n) et $h'_n(x) \ = \ n\ x^{n-1} + 1$**
- **1 pt : tableau complet**

x	0	$+\infty$
Signe de $h'_n(x)$	$+$	
h_n	-1 $\nearrow$	$+\infty$

- **2 pts : théorème de la bijection**
  - × **1 pt : h_n continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$**
  - × **1 pt : comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in [0, +\infty[$**

7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

- **1 pt : $-1 = h_n(0) \ < \ h_n(u_n) \ < \ h_n(1) = 1$**
- **1 pt : en appliquant $h_n^{-1} : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$ qui, d'après le théorème de la bijection, est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$**

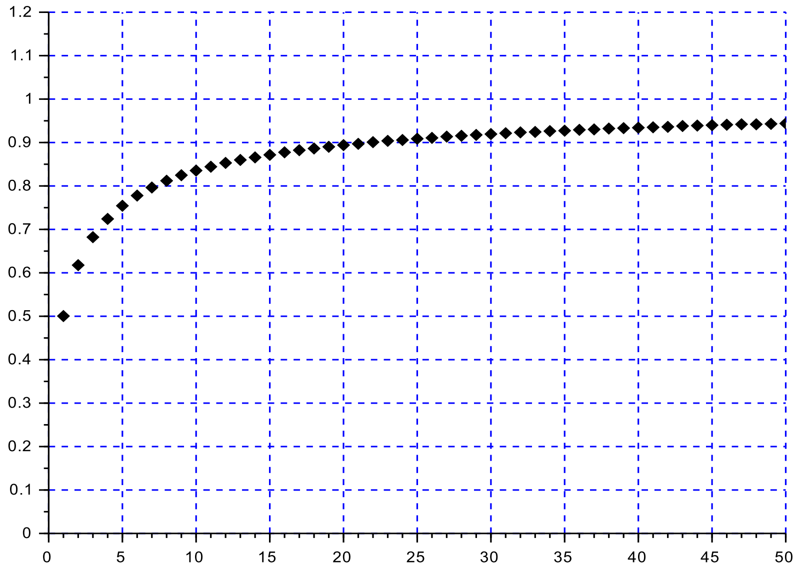
8. Déterminer u_1 et u_2.

- **1 pt : $h_1(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x^1 + x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ 2\,x = 1 \ \Leftrightarrow \ x = \dfrac{1}{2}$ donc $u_1 = \frac{1}{2}$**
- **1 pt : $h_2(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + x - 1 = 0$**
- **1 pt : $P(X) = X^2 + X - 1$ admet pour racines $x_- = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $x_+ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0$ donc $u_2 = x_+$**

9. ***a)*** Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

- **1 pt :**
```
4  while (b-a) > 10^(-3)
```
- **1 pt :**
```
7          if (c^n + c - 1) > 0 then
```
- **1 pt :**
```
9          a = c
```
- **1 pt :**
```
12  u = a
```
- **1 pt : point bonus si l'affectation u est sortie de la boucle**

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



- **2 pts : si au moins 3 items parmi : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, minorée par $\frac{1}{2}$, majorée par 1, convergente de limite 1**
(1 pt si seulement 2 items, 0 pt si seulement 1 item)

10. a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

- **1 pt : ${u_n}^n = 1 - u_n$ par définition de u_n**
- **1 pt :** $f(u_n) = \dfrac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} = \dfrac{\ln\left({u_n}^n\right)}{\ln(u_n)} = \dfrac{n\,\cancel{\ln(u_n)}}{\cancel{\ln(u_n)}}$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- **1 pt : daprès la question précédente : $f(u_n) = n \leqslant n+1 = f(u_{n+1})$**
- **1 pt : en appliquant la fonction $f^{-1} :]0,+\infty[\to]0,1[$ qui d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est strictement croissante sur $]0,+\infty[$**

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

- **1 pt : (u_n) croissante et majorée par 1 donc convergente de limite $\ell \in [0,1]$**
- **1 pt : comme la suite (u_n) est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant u_1 = \dfrac{1}{2}$**
- **1 pt : démontrons $\ell = 1$. On procède par l'absurde.**
- **1 pt : on suppose $\ell \neq 1$ et donc $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[$**
- **1 pt : $\big(f(u_n)\big)$ est convergente de limite $f(\ell) \in \mathbb{R}$ car f est continue en $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[\subseteq]0,1[$**
- **1 pt : $f(u_n) = n$ avec $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ mais $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$**