DS1 (version B)

Exercice 1 (HEC 2007)

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t.
Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } T & \Leftrightarrow & T - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \text{l'un (au moins) des coefficients diagonaux de la réduite} \\ & & (\textbf{triangulaire supérieure}) \text{ de } T - \lambda\, I_3 \text{ est nul} \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{rg}(T - \lambda\, I_3) & = & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftrightarrow L_2}{=} & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)\, L_2}{=} & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda\,(1-\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } T & \Leftrightarrow & 1 - \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ 1 = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda\,(1-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda = 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \operatorname{Sp}(t) = \operatorname{Sp}(T) = \{0, 1\}.}$$

Commentaire

La matrice T est non inversible (puisque $C_1 = C_3$).
On pouvait donc conclure de suite que 0 est une valeur propre de T.

- Déterminons alors $E_0(t) = \text{Ker}(t)$.

  Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \text{Ker}(t) & \Longleftrightarrow & t(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & TU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ker}(t) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid t(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\[4pt]
& = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ ET } \ y = 0\} \\[4pt]
& = & \{(-z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ ET } \ y = 0\} \\[4pt]
& = & \{z \cdot (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ ET } \ y = 0\} \ = \ \text{Vect}\left((-1, 0, 1)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_0(t) = \text{Ker}(t) = \text{Vect}\left((-1, 0, 1)\right)}$$

  La famille $\big((-1, 0, 1)\big)$ est :

  $\times$ génératrice de $E_0(t)$ d'après ce qui précède,

  $\times$ libre car constituée d'un vecteur non nul.

  C'est donc une base de $E_0(t)$.

$$\boxed{\dim\big(E_0(t)\big) = 1}$$

- Déterminons enfin $E_1(t) = \text{Ker}(t - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

  Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \text{Ker}(t - \text{id}) & \Longleftrightarrow & (t - \text{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & (T - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 0 \\ & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \ y = z = 0 \right.
\end{array}$$

(par remontées successives)

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(t - \mathrm{id}) & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (t-\mathrm{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} \\ & = & \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} \\ & = & \{x \cdot (1,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left((1,0,0)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(t - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left((1,0,0)\right)}$$

La famille $\big((1,0,0)\big)$ est :

× génératrice de $E_1(t)$ d'après ce qui précède,

× libre car constituée d'un vecteur non nul.

C'est donc une base de $E_1(t)$.

$$\boxed{\dim\big(E_1(t)\big) = 1}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les espaces propres par lecture de la matrice $T - \lambda\, I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 0$.

  On cherche les vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(T)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $TU = 0_{M3,1}$.

  Or :

  $$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ & = & x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $y = 0$ (sinon on ne peut annuler les coefficients en $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ position).

  Il reste alors une contrainte : $x = -y$. En prenant par exemple $y = 1$, on obtient :

  $$E_0(T) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- On peut procéder de même pour $E_1(T)$.

  On cherche les vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que : $(T - I_3)\, U = 0$. Or :

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ = \ x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3$$

  Pour obtenir le vecteur nul à l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $y = z$ (sinon on ne peut annuler le coefficient en $3^{\text{ème}}$ position) puis $y = z = 0$ (sinon on obtient un coefficient non nul en $1^{\text{ère}}$ position.

  Il reste alors une variable libre x. En prenant $x = 1$, on obtient :

  $$E_1(T) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

- L'endomorphisme t opère sur $\mathbb{R}^3$, espace de dimension 3.
  Or d'après ce qui précède :
  $$\dim\big(E_0(t)\big) + \dim\big(E_1(t)\big) = 1 + 1 = 2 \neq 3$$
  $$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } t \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$
- D'autre part, on a démontré que 0 est valeur propre de t *(et ainsi* $\mathrm{Ker}(t) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$*)*.
  $$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme n'est pas bijectif.}}$$

□

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.
Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

× pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;

× $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.

Démonstration.
Notons $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$.
Par définition :

× pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$. Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(t(e_i)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$. Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(t(e_{n+1})\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que la matrice T associée à t relativement à $\mathscr{B}_c$ est :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(t\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boxed{\text{La matrice } T \text{ associée à } t \text{ relativement à } \mathscr{B}_c \text{ est en forme de } T.}$$

□

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

Démonstration.
- Tout d'abord :
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(T) &= \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = 2 \end{aligned}$$

En effet, la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$,

× libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et : $\dim\big(\text{Vect}(\mathcal{F})\big) = 2$.

$$\boxed{\text{rg}(t) = \text{rg}(T) = 2}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\text{Ker}(t)\big) + \underbrace{\dim\big(\text{Im}(t)\big)}_{=2} = \underbrace{\dim\big(\mathbb{R}^{2n+1}\big)}_{=2n+1}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\big(\text{Ker}(t)\big) = (2n+1) - 2 = 2n-1.}$$ □

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

Démonstration.

- D'après la question précédente, $\text{Ker}(t) \neq \{0_{\mathbb{R}^{2n+1}}\}$.
  On en déduit que 0 est valeur propre de t d'espace propre associé $E_0(t) = \text{Ker}(t)$.

$$\boxed{\text{D'après la question précédente : } \dim\big(E_0(t)\big) = \dim\big(\text{Ker}(t)\big) = 2n-1.}$$

- Par définition de l'endomorphisme t :

  × pour tout $i \in [\![2, n]\!]$: $t(e_i) = e_1$. On en déduit, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$:

$$t(e_1 - e_i) = t(e_1) - t(e_i) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![2, n]\!],\ e_1 - e_i \in \text{Ker}(t).}$$

  × pour tout $i \in [\![n+2, 2n+1]\!]$: $t(e_i) = e_1$. On en déduit, pour tout $i \in [\![n+2, 2n+1]\!]$:

$$t(e_1 - e_i) = t(e_1) - t(e_i) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![n+2, 2n+1]\!],\ e_1 - e_i \in \text{Ker}(t).}$$

- Notons $I = [\![2, n]\!] \cup [\![n+2, 2n+1]\!]$.
  Démontrons que la famille $\mathcal{E} = \big(e_1 - e_i\big)_{i \in I}$ est libre.

  Soit $(\lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$.
  (on choisit une numérotation adaptée au problème)

  Supposons :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \lambda_2 & \cdot & (e_1 - e_2) & + & \ldots & + & \lambda_n & \cdot & (e_1 - e_n) & \\ + & \lambda_{n+2} & \cdot & (e_1 - e_{n+2}) & + & \ldots & + & \lambda_{2n+1} & \cdot & (e_1 - e_{2n+1}) & = \ 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \end{array}$$

  En réordonnant :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \multicolumn{10}{l}{(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+2} + \ldots + \lambda_{2n+1}) \cdot e_1} \\ + & (-\lambda_2) & \cdot & e_2 & + & \ldots & + & (-\lambda_n) & \cdot & e_n & \\ + & (-\lambda_{n+2}) & \cdot & e_{n+2} & + & \ldots & + & (-\lambda_{2n+1}) & \cdot & e_{2n+1} & = \ 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \end{array}$$

La famille $\mathscr{B}_c = (e_1, \ldots, e_{2n+1})$ est une base de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et est donc libre.
Ainsi, la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+2}, \ldots, e_{2n+1})$, sous-famille de $\mathscr{B}_c$ est elle aussi libre.
On déduit donc de l'égalité précédente :

$$\lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+2} + \ldots + \lambda_{2n+1} = -\lambda_2 = \ldots = -\lambda_n = -\lambda_{n+2} = \ldots = -\lambda_{2n+1} = 0$$

D'où : $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+2} = \ldots = \lambda_{2n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{E} \text{ est libre.}}$$

- D'après ce qui précède :
  - × la famille $\mathcal{E}$ est une famille libre constituée de vecteurs de $\mathrm{Ker}(t)$,
  - × $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) = 2n - 1 = \dim(\mathrm{Ker}(t))$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{E} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(t).}$$

□

Commentaire

On peut aussi exhiber une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(t)$.
Détaillons les grandes lignes de la rédaction associée.

Soit $u = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n+1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}(t) &\Leftrightarrow t(u) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \\
&\Leftrightarrow T\,U = 0_{\mathscr{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1} & = & 0 \\ x_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n+1} & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1} & = & 0 \\ x_{n+1} & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -(x_2 + \ldots + x_n) - (x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1}) \\ x_{n+1} = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Ker}(t) \\
= \ & \left\{ (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \ \middle| \ \begin{array}{l} x_1 = -(x_2 + \ldots + x_n) - (x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1}) \\ x_{n+1} = 0 \end{array} \right\} \\
= \ & \{(x_1, \ldots, x_n, 0, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \mid x_1 = -(x_2 + \ldots + x_n) - (x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1})\} \\
= \ & \left\{ (-x_2 - \ldots - x_n - x_{n+2} - \ldots - x_{2n+1}, \ldots, x_n, 0, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \ \middle| \ \begin{array}{l} (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \\ (x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \end{array} \right\} \\
= \ & \ldots \\
= \ & \mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})
\end{aligned}$$

Commentaire

On a exhibé lors de la résolution une famille libre $\mathcal{E}$ constituées de vecteurs de $\text{Ker}(t)$. On aurait pu en exhiber d'autres. Par définition de l'endomorphisme t :

× pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $t(e_i) = e_1$. On en déduit, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$t(e_i - e_{i+1}) = t(e_i) - t(e_{i+1}) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1, n-1]\!],\ e_i - e_{i+1} \in \text{Ker}(t).}$$

× pour tout $i \in [\![n+2, 2n+1]\!]$: $t(e_i) = e_1$. On en déduit, pour tout $i \in [\![n+2, 2n]\!]$:

$$t(e_i - e_{i+1}) = t(e_i) - t(e_{i+1}) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![n+2, 2n]\!],\ e_i - e_{i+1} \in \text{Ker}(t).}$$

× enfin : $t(e_n - e_{n+2}) = t(e_n) - t(e_{n+2}) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } e_n - e_{n+2} \in \text{Ker}(t).}$$

Finalement, la famille :

$$\mathcal{F} = \big(e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n+2} - e_{n+1}, \dots, e_{2n} - e_{2n+1}, e_n - e_{n+2}\big)$$

est une famille libre de vecteurs de $\text{Ker}(t)$.
Étant de cardinal $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2n - 1$, c'est une (autre) base de $\text{Ker}(t)$.

3. Montrer que $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$, où $\text{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Démonstration.
Soit $y \in \text{Im}(t \circ t)$.
Par définition, il existe $x \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que : $y = (t \circ t)(x) = t\big(t(x)\big) \in \text{Im}(t)$.

$$\boxed{\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)}$$

Commentaire

- Cette question est un classique des exercices d'algèbre théorique à HEC.
Le thème plus général est celui des images et noyaux itérés.
La première étape d'une telle étude consiste à démontrer :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \text{Im}\left(t^{i+1}\right) \subset \text{Im}\left(t^i\right) \quad \text{et} \quad \text{Ker}\left(t^{i+1}\right) \supset \text{Ker}\left(t^i\right)$$

- Les exercices d'algèbre théorique donnent lieu à certaines questions dont la résolution est particulièrement simple si on s'y prend bien. Ici, il y a deux choses importantes :

1) savoir appliquer les techniques de rédaction.
Pour démontrer une inclusion d'ensembles, on prend un élément dans le premier ensemble et on démontre qu'il est dans le second.

2) avoir une bonne connaissance du cours.
Si l'on maîtrise la notion d'image, on sait alors comment s'écrit y et cela permet directement de conclure.

Dans les sujets HEC, c'est cette bonne connaissance du cours et bonne maîtrise des objets étudiés qui permet de faire la différence.

□

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$.
Établir que $\mathscr{B} = \left(e_1, \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(t)$.
Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que e_1 et $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i$ sont deux vecteurs de $\mathrm{Im}(t)$. Par définition de t :
  × $e_1 = t(e_1) \in \mathrm{Im}(t)$,
  × $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i = t(e_{n+1}) \in \mathrm{Im}(t)$.
- Démontrons maintenant que $\mathscr{B}$ est une famille libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$.
  Cette égalité se réécrit :
  $$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \ldots + \lambda_2 \cdot e_{2n+1} = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$
  La famille $\mathscr{B}_c = (e_1, \ldots, e_{2n+1})$ est une base de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et est donc libre.
  On déduit donc de l'égalité précédente :
  $$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_2 = 0$$
  D'où : $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$.
  $$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} = \left(e_1, \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i \right) \text{ est libre.}}$$
- D'après ce qui précède :
  × la famille $\mathscr{B}$ est une famille libre constituée de vecteurs de $\mathrm{Im}(t)$.
  × $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Im}(t)\big)$.
  $$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathscr{B} \text{ est une base de } \mathrm{Im}(t).}$$
- Déterminons maintenant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\tilde{t})$. Comme :
  × $\tilde{t}(e_1) = t(e_1) = e_1$. Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{G}}\big(\tilde{t}(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  × $$\begin{aligned} \tilde{t}\left(\sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i \right) &= t\left(\sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{2n+1} t(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} t(e_i) + t(e_{n+1}) + \sum\limits_{i=n+2}^{2n+1} t(e_i) \; . \\ &= \sum\limits_{i=1}^{n} e_1 + \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i + \sum\limits_{i=n+2}^{2n+1} e_1 \\ &= 2n \cdot e_1 + \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i \end{aligned}$$
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\tilde{t}(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 2n \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\tilde{t}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

Dans cette question, on introduit l'application $\tilde{t}$. Il n'est pas demandé de démontrer que $\tilde{t}$ est bien un endomorphisme de $\text{Im}(t)$. Pour ce faire, il faudrait démontrer :

1) l'application $\tilde{t}$ est linéaire. Ce résultat provient directement de la linéarité de l'application t.

2) l'application $\tilde{t}$ est à valeurs dans $\text{Im}(t)$. Démontrons-le.
Soit $v \in \text{Im}(t)$. Il existe donc $u \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que : $v = t(u)$. On a alors, par définition de $\tilde{t}$:

$$\tilde{t}(v) = t(v) = t\big(t(u)\big) = (t \circ t)(u) \in \text{Im}(t \circ t) \subseteq \text{Im}(t)$$

Ce dernier point permet de mettre en avant le fait que le résultat de la question ***3.*** joue un rôle primordial dans la bonne définition de l'endomorphisme $\tilde{t}$. □

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ.
Montrer que x appartient à $\text{Im}(t)$.

Démonstration.
D'après l'énoncé : $t(x) = \lambda \cdot x$.

On en déduit : $x = \dfrac{1}{\lambda} \cdot t(x) = t\left(\dfrac{1}{\lambda} \cdot x\right) \in \text{Im}(t)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } x \in \text{Im}(t).}$$

Commentaire

Il s'agit là encore d'une question classique des exercices d'algèbre théorique des épreuves HEC. Comme souvent dans ce type de questions, écrire la définition est un grand pas vers la résolution de la question. Disons-le à nouveau : dans les sujets HEC, c'est cette bonne connaissance du cours et bonne maîtrise des objets étudiés qui permet de faire la différence. □

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)***, 0 est valeur propre de t.
- Démontrons que la seule autre valeur propre de t est 1.
Supposons que t admet une valeur propre $\lambda \neq 0$. Notons x un vecteur propre associé à λ.
D'après la question précédente : $x \in \text{Im}(t)$. On en déduit :

$$\tilde{t}(x) = t(x) = \lambda \cdot x$$

Ainsi, λ est un valeur propre de x.

$$\boxed{\text{On en déduit que toute valeur propre non nulle de } t \text{ est valeur propre de } \tilde{t}.}$$

Or, d'après la question précédente $N = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\tilde{t}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Sp}\left(\tilde{t}\right) = \text{Sp}(N) = \{1\}}$$

On en conclut que 1 est la seule valeur propre non nulle possible pour t. Il reste à démontrer que 1 est bel et bien valeur propre de t. Or, par définition :

$$t(e_1) = e_1$$

donc 1 est bien valeur propre de t.

$$\boxed{\text{La seule valeur propre non nulle de } t \text{ est 1. On en déduit : } \text{Sp}(t) = \{0, 1\}.}$$

Commentaire

- Dans la première partie du raisonnement, on suppose que t admet une valeur propre non nulle. En se basant sur cette hypothèse, on obtient une caractérisation des valeurs propres non nulles de t. Plus précisément :

$$\begin{array}{l}t \text{ admet une valeur} \\ \text{propre } \lambda \neq 0\end{array} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

Il faut bien comprendre que dans cette première partie du raisonnement, on a supposé (et non démontré !) l'existence d'une valeur propre $\lambda \neq 0$ de t. La partie gauche de l'implication n'étant pas encore démontrée, on ne peut conclure la partie droite.

C'est pourquoi il faut, dans la deuxième partie du raisonnement, démontrer que t admet bien une valeur propre non nulle. Une idée très simple permet de le démontrer : il suffit de tester la valeur obtenue lors de la première étape du raisonnement ($\lambda = 1$) !

- Ce type de raisonnement est parfois présenté sous le nom d'**analyse-synthèse** :
  × **analyse** : on suppose l'existence d'un objet vérifiant certains critères (λ valeur propre non nulle de t). Si cet objet existe, il est alors d'une certaine forme ($\lambda = 1$).
  × **synthèse** : on vérifie que l'objet obtenu lors de la phase d'analyse répond bien aux critères initiaux ($\lambda = 1$ est bien une valeur propre non nulle). Cela permet de lever la réserve d'existence.

Ce schéma de démonstration permet non seulement de conclure :

$$\begin{array}{l}\text{l'objet répond à} \\ \text{certains critères}\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{l'objet s'écrit sous une} \\ \text{forme particulière}\end{array}$$

mais aussi de démontrer que chacune des deux propositions de l'équivalence est vérifiée.

- Ce type de schéma de démonstration est par exemple utilisé lorsque l'on souhaite démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$f = g + h$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire.
La démonstration est la suivante :
  × **analyse** : si f s'écrit sous cette forme, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rclcll} f(x) & = & g(x) & + & h(x) & \\ f(-x) & = & g(x) & - & h(x) & \begin{array}{l}\textit{(car } g(-x) = g(x) \\ \textit{et } h(-x) = -h(x)\textit{)}\end{array} \end{array}$$

  On en déduit : $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
  × **synthèse** : si on note $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ alors on a bien : $f = g + h$ et g est une fonction paire et h une fonction impaire.

- On s'intéresse alors à $E_1(t)$. D'après la question précédente :

$$E_1(t) \subseteq \mathrm{Im}(t)$$

Or, par définition de $\tilde{t}$: $E_1\left(\tilde{t}\right) = E_1(t) \cap \mathrm{Im}(t)$.

$$\boxed{\text{On déduit de l'inclusion précédente : } E_1\left(\tilde{t}\right) = E_1(t).}$$

- On en déduit : $\dim\big(E_1(t)\big) = \dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big)$.

  Déterminons $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big)$. Remarquons tout d'abord :

  × comme 1 est valeur propre de $\tilde{t}$, $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) \geqslant 1$.

  × comme $E_1\left(\tilde{t}\right) \subset \mathrm{Im}(t)$, alors : $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(t)) = 2$.

  $$\boxed{1 \leqslant \dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) \leqslant 2}$$

  Démontrons alors $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) \neq 2$, ce qui permettra de conclure : $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 1$.
  Pour ce faire, on procède par l'absurde.
  On suppose $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 2$.
  L'endomorphisme $\tilde{t} \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}(t))$ posède 1 pour une unique valeur propre et :

  $$\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 2 = \dim\big(\mathrm{Im}(t)\big)$$

  On en déduit que $\tilde{t}$ est diagonalisable. Il en est de même de N.
  Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de N telles que : $N = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de N. Ainsi $D = I$ et :

  $$N = PDP^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$$

  Absurde !

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 1 \text{ et ainsi : } \dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 1.}$$

- On a alors : $\dim\big(E_1(t)\big) = 1$ et :

  $$\dim\big(E_0(t)\big) + \dim\big(E_1(t)\big) \ = \ (2n-1)+1 \ = \ 2n \neq 2n+1 \ = \ \dim\big(\mathbb{R}^{2n+1}\big)$$

  $$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } t \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

Il était possible de démontrer $\dim\big(E_1(t)\big) = 1$ en se ramenant à la détermination de $E_1(N)$. Détaillons ce procédé.

- Soit $x \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(x)$. On a alors :

  $$\begin{array}{rcl} x \in E_1(t) & \Leftrightarrow & t(x) = x \\ & \Leftrightarrow & NX = X \\ & \Leftrightarrow & X \in E_1(N) \end{array}$$

  On en déduit : $\dim\big(E_1(t)\big) = \dim\big(E_1(N)\big)$.
  Attention ! Cela ne démontre en aucun cas l'égalité des espaces propres :

  $$E_1(t) \subseteq \mathbb{R}^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad E_1(N) \subseteq \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

- Il est alors simple de démontrer : $E_1(N) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et permet ainsi de conclure : $\dim\big(E_1(t)\big) = \dim\big(E_1(N)\big) = 1$.

□

Commentaire

- L'endomorphisme $\tilde{t}$ introduit en question ***3.*** n'est autre que la restriction de l'endomorphisme t à l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(t)$. Rappelons que la restriction d'une application f à un ensemble A est généralement introduite en première année lors du chapitre *Ensembles et applications*. Cependant, lorsque l'on se réfère au programme officiel ECE, on ne voit pas apparaître le terme *restriction* dans ce chapitre. Profitons de cet énoncé pour faire un point sur cette notion.
- Commençons par définir la notion de restriction.
On considère une application f d'un ensemble E vers un ensemble F.
La **restriction** de f à un ensemble A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :
$$f_{|A} \ : \ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$
Autrement dit, $f_{|A}$ est l'application définie par : $\forall x \in A, \ f_{|A}(x) \ = \ f(x)$.
- On a alors : $\boxed{\mathrm{Im}\,(f_{|A}) = f(A)}$ où $f(A)$ est l'image de l'ensemble A par l'application f :
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\,(f_{|A}) & = & \{y \in F \mid \exists x \in A, \ y = f_{|A}(x)\} \\ & = & \{y \in F \mid \exists x \in A, \ y = f(x)\} \qquad \textit{(par définition de } f_{|A}\textit{)} \\ & = & f(A) \end{array}$$
- Si on suppose de plus, comme c'est le cas dans l'exercice, que f est une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F et $A \subset E$, on peut aussi démontrer :
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f_{|A}) = \mathrm{Ker}(f) \cap A}$$
En effet :
$$\begin{array}{rcl} x \in \mathrm{Ker}\left(f_{|A}\right) & \Leftrightarrow & x \in A \ \texttt{ ET } \ f_{|A}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \ \texttt{ ET } \ f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \ \texttt{ ET } \ x \in \mathrm{Ker}(f) \\ & \Leftrightarrow & x \in A \cap \mathrm{Ker}(f) \end{array}$$
- Dans l'énoncé, on avait : $\tilde{t} = t_{|\mathrm{Im}(t)}$. D'après ce qui précède :
$$\boxed{\mathrm{Im}\left(t_{|\mathrm{Im}(t)}\right) = t(\mathrm{Im}(t))} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Ker}\left(t_{|\mathrm{Im}(t)}\right) = \mathrm{Ker}(t) \cap \mathrm{Im}(t)}$$
On peut alors démontrer :
$$\begin{array}{rcl} E_1(\tilde{t}) & = & \mathrm{Ker}\left(\tilde{t} - \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(t)}\right) \\ & = & \mathrm{Ker}\left(t_{|\mathrm{Im}(t)} - \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(t)}\right) \\ & = & \mathrm{Ker}\left((t - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n+1}})_{|\mathrm{Im}(t)}\right) \\ & = & \mathrm{Ker}(t - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n+1}}) \cap \mathrm{Im}(t) \\ & = & E_1(t) \cap \mathrm{Im}(t) \end{array}$$
(on peut aussi faire une démonstration analogue à la précédente en raisonnant par équivalence à partir de $x \in E_1(\tilde{t})$*)*

Exercice 2 (`EML 2016 voie S`)

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_-$. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.
Deux cas se présentent.

- Si $x = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - × Tout d'abord : $v_{2n} \ = \ \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^0} \ = \ -1$.
  - × Ensuite : $v_{2n+1} \ = \ \dfrac{(-1)^{(2n+1)+1}}{(2n+1)^0} \ = \ 1$.

  La suite (v_n) admet donc deux sous-suites qui convergent vers deux limites distinctes.
  On en déduit que la suite (v_n) diverge. En particulier : $v_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

  La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est donc (grossièrement) divergente.

- Si $x < 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{2n} \ = \ \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^x} \ = \ -\frac{1}{(2n)^x} \ = \ -(2n)^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \qquad \textit{(car } -x > 0\textit{)}$$

  La suite (v_n) admet donc une sous-suite qui diverge.
  On en déduit que la suite (v_n) diverge. En particulier : $v_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

  La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est donc (grossièrement) divergente.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in \mathbb{R}_-, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \text{ diverge.}}$$

Commentaire

On rappelle la condition `NÉCESSAIRE` de convergence des séries :

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On utilise généralement la contraposée de ce résultat, à savoir :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge}$$

(une série grossièrement divergente est divergente)

□

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

Démonstration.

- Déterminons le sens de variations de (u_{2p}).
  Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{2(p+1)} - u_{2p} &= u_{2p+2} - u_{2p} = \sum_{k=1}^{2p+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}} + \frac{(-1)^{(2p+1)+1}}{(2p+1)^x} + \frac{(-1)^{(2p+2)+1}}{(2p+2)^x} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}} \\ &= \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x} \end{aligned}$$

  Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x} \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{(2p+1)^x} \geqslant \frac{1}{(2p+2)^x} \\ &\Leftrightarrow (2p+1)^x \leqslant (2p+2)^x && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow x\,\ln(2p+1) \leqslant x\,\ln(2p+2) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \ln(2p+1) \leqslant \ln(2p+2) && \textit{(par multiplication par } \tfrac{1}{x} > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow 2p+1 \leqslant 2p+2 && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{aligned}$$

  Cette dernière inégalité est vraie. Donc, par équivalence : $\dfrac{1}{(2p+1)^x} - \dfrac{1}{(2p+2)^x} \geqslant 0$.
  On en déduit : $u_{2(p+1)} - u_{2p} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_{2p}) \text{ est donc croissante.}}$$

- Montrons que la suite (u_{2p-1}) est décroissante.
  Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} &= u_{2p+1} - u_{2p-1} = \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}} + \frac{(-1)^{(2p)+1}}{(2p)^x} + \frac{(-1)^{(2p+1)+1}}{(2p+1)^x} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}} \\ &= -\frac{1}{(2p)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} \end{aligned}$$

  Or :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2p)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} \leqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{(2p+1)^x} \leqslant \frac{1}{(2p)^x} \\ &\Leftrightarrow 2p+1 \geqslant 2p && \textit{(par les mêmes arguments que précédemment)} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie. Donc, par équivalence : $-\dfrac{1}{(2p)^x} + \dfrac{1}{(2p+1)^x} \leqslant 0$.
On en déduit : $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_{2p-1}) \text{ est donc décroissante.}}$$

- Montrons enfin que la suite $(u_{2p} - u_{2p-1})$ est convergente et $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} - u_{2p-1} = 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{2p} - u_{2p-1} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \frac{(-1)^{(2p)+1}}{(2p)^x} = -\frac{1}{(2p)^x}$$

Or, comme $x > 0$: $\lim\limits_{p\to+\infty} -\dfrac{1}{(2p)^x} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{p\to+\infty} u_{2p} - u_{2p-1} = 0.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que les suites } (u_{2p}) \text{ et } (u_{2p-1}) \text{ sont adjacentes.}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après le théorème des suites adjacentes,}\\ \text{les suites } (u_{2p}) \text{ et } (u_{2p-1}) \text{ convergent vers la même limite, notée } S(x).\end{array}}$$

□

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration.

- Rédaction 1 :
Soit I un intervalle ouvert contenant $S(x)$.
  × $u_{2p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2p}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (u_n)) sauf un nombre fini,
  × $u_{2p-1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2p-1}) (*i.e.* tous les termes d'indices impairs de la suite (u_n)) sauf un nombre fini.

  Finalement, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini.
  Cela démontre que la suite (u_n) converge vers $S(x)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par définition de la convergence,}\\ \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{, il existe un rang } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_0 \text{, on a : } |u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon.\end{array}}$$

- Rédaction 2 :
Soit $\varepsilon > 0$.
  × $u_{2p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$, donc, par définition de la convergence :
  il existe un rang $p_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_1$: $|u_{2p} - S(x)| \leqslant \varepsilon$.
  × $u_{2p-1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$, donc, par définition de la convergence :
  il existe un rang $p_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_2$: $|u_{2p-1} - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

  On choisit alors $n_0 = \max(2p_1, 2p_2 - 1)$.

$$\boxed{\text{Alors, pour tout } n \geqslant n_0 : |u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon.}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question la propriété, parfois appelée « propriété de recouvrement » :

$$\left.\begin{array}{l} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Cette propriété n'apparaît pas dans le programme officiel de la voie ECE.
Il faut donc la redémontrer à chaque utilisation.

- La convergence d'une suite (u_n) vers un réel ℓ admet deux définitions équivalentes.

1) Définition sans les ε :

(u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux

C'est la définition donnée par le programme officiel (correspond à la première rédaction).

2) Définition avec les ε :

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

La présence d'un ε dans l'énoncé rend obligatoire l'utilisation de cette définition une fois la propriété de recouvrement démontrée. C'est certainement la deuxième rédaction que le concepteur avait en tête.

☐

c) Justifier alors que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

Démonstration.
La suite (u_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme la suite } (u_n) \text{ converge vers } S(x), \\ \text{on en déduit que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x} \text{ converge et } \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x} = S(x).\end{array}}$$

☐

d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.a)***, la suite (u_{2p}) est croissante. Donc, par récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2p} \leqslant u_{2(p+n)}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S(x)$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p} \leqslant S(x)$$

- D'après la question ***2.a)***, la suite (u_{2p-1}) est décroissante. Donc, par récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2(p+n)+1} \leqslant u_{2p+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S(x)$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ S(x) \leqslant u_{2p+1}$$

- Enfin, comme la suite (u_{2p-1}) est décroissante, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\underbrace{u_{2(p+1)-1}}_{= u_{2p+1}} \leqslant u_{2p-1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}.}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question une propriété classique :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(v_n) \text{ croissante} \\ v_n \to \ell \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell}$$

(dans l'énoncé, c'est la suite (v_{2p}) qui vérifie cette propriété)
Cette propriété stipule qu'une suite croissante qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ est majorée par ℓ. Ce résultat est immédiat si l'on sait que la limite ℓ, si elle existe, d'une suite croissante (v_n) est sa borne supérieure. Or, par définition, la borne supérieure d'une suite est le plus petit des majorants de la suite. Ce qui permet de conclure. La notion de borne supérieure n'étant pas explicitement au programme, on refait ici la démonstration.

- On peut aussi démontrer ce résultat par l'absurde. Détaillons la démonstration.

  On suppose :
  × la suite (v_n) croissante,
  × la suite (v_n) converge vers ℓ,
  × `NON`$(\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell)$ est vérifiée.
  Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_0} > \ell$.

  La suite (v_n) étant croissante, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ v_n \geqslant v_{n_0}$$

  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant v_{n_0}$.
  En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant v_{n_0} > \ell$.
  Absurde !

□

e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
On pourra séparer les cas n pair et n impair.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent.

- Si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$ (donc $u_n = u_{2p}$).
  D'après la question ***2.c)*** :

$$u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1}$$

  Donc :

$$0 \leqslant \underbrace{S(x) - u_{2p}}_{= |S(x) - u_{2p}|} \leqslant u_{2p+1} - u_{2p}$$

(d'après l'inégalité de gauche)

Enfin :

$$\begin{aligned} u_{2p+1} - u_{2p} &= \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \frac{(-1)^{(2p+1)+1}}{(2p+1)^x} \\ &= \frac{1}{(2p+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \qquad \textit{(car } n = 2p\textit{)} \end{aligned}$$

Finalement, dans le cas où $n = 2p$ on a démontré :

$$|S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$$

- Si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p - 1$ (donc $u_n = u_{2p-1}$).
D'après la question ***2.c)*** :

$$u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p-1}$$

Donc :

$$u_{2p} - u_{2p-1} \leqslant \underset{\displaystyle -|S(x) - u_{2p-1}|}{\underset{\shortparallel}{S(x) - u_{2p-1}}} \leqslant 0 \qquad \textit{(d'après l'inégalité de droite)}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} u_{2p} - u_{2p-1} &= \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \frac{(-1)^{(2p)+1}}{(2p)^x} \\ &= -\frac{1}{(2p)^x} = -\frac{1}{(n+1)^x} \qquad \textit{(car } n = 2p-1\textit{)} \end{aligned}$$

Finalement, dans le cas où $n = 2p - 1$ on a démontré :

$$-\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant -|S(x) - u_n| \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{(n+1)^x} \geqslant |S(x) - u_n|$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}}$$

Commentaire

On a séparé dans cette démonstration le cas n pair du cas où n est impair.
En particulier, on a considéré :

$$u_{2p+1} = \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$$

Le fait que l'on somme pour k variant de 1 à $2p+1$ (nombre impair) ne démontre en `AUCUN CAS` que la variable d'itération k est toujours impaire. La variable k prend toutes les valeurs de l'ensemble $[\![1, 2p+1]\!]$ et ainsi $(-1)^{k+1}$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Il ne faut pas confondre cette question avec la question ***3.*** où l'on sépare la somme suivant les valeurs pairs et impaires de k.

□

f) En déduire une fonction **Scilab** qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x > 0$.

- On cherche ici à trouver un entier n_0 tel que u_{n_0} est une valeur approchée de $S(x)$ à ε près. Autrement dit, on souhaite exhiber n_0 tel que :
$$|S(x) - u_{n_0}| \ \leqslant \ \varepsilon$$
- Pour que cette inégalité soit vérifiée, il suffit de trouver n_0 tel que : $\dfrac{1}{(n_0+1)^x} \ \leqslant \ \varepsilon$.
En effet, d'après ce qui précède, on aura alors, par transitivité :
$$|S(x) - u_{n_0}| \ \leqslant \ \frac{1}{(n_0+1)^x} \ \leqslant \ \varepsilon$$
- Or on a :
$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant \varepsilon & \Leftrightarrow & (n+1)^x \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x \ln(n+1) \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction ln sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln(n+1) \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{x} & \textit{(par multiplication par } \frac{1}{x} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n+1 \geqslant \exp\left(\dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant \exp\left(\dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right) - 1 & \end{array}$$
L'entier : $n_0 \ = \ \left\lceil \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right\rceil$ convient.
- Il suffit donc de calculer u_{n_0} avec $n_0 \ = \ \left\lceil \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right\rceil$.

```
function u = approxS(x, epsilon)
  n = ceil((1 / epsilon) ^ (1 / x) - 1)
  u = 1
  for k = 1:(n-1)
    u = u + ((-1) ^ (k+1)) / (n ^ x)
  end
endfunction
```

□

3. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

puis :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

Démonstration.

- On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \sum_{\substack{k \in [\![1, 2p]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} + \sum_{\substack{k \in [\![1, 2p]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{(2k)+1}}{(2k)^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{(2k-1)+1}}{(2k-1)^x} \\
&= -\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^x\, k^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} \\
&= -\frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}}$$

- Pour démontrer la deuxième égalité, il suffit de démontrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

ce qui s'écrit, en réordonnant :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \left(\frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{2^x} \right) \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

Démontrons cette dernière égalité en partant de la partie droite :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \left(\frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{2^x} \right) \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \\
= {} & \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \qquad \left(\textit{car } \frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{2^x} = \frac{2-1}{2^x} = \frac{1}{2^x}\right) \\
= {} & \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k)^x} \\
= {} & \sum_{\substack{k \in [\![1, 2p]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^x} + \sum_{\substack{k \in [\![1, 2p]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.}$$

Commentaire

- On pouvait aussi démontrer directement la deuxième éaglité en commençant par regrouper les deux sommes sur $[\![1,2p]\!]$ puis en écrivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} &= \sum_{\substack{k\in[\![1,2p]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} + \sum_{\substack{k\in[\![1,2p]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{(2k)+1}-1}{(2k)^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{(2k-1)+1}-1}{(2k-1)^x} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{-1-1}{(2k)^x} + \cancel{\sum_{k=1}^{p} \frac{1-1}{(2k-1)^x}} \\
&= -2\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^x\,k^x} = -\frac{2}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} = -\frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}
\end{aligned}$$

- À la lecture de l'énoncé, plusieurs éléments doivent mettre sur la piste d'une séparation de la somme suivant les indices pairs et impairs :
  - × les termes $(-1)^{k+1}$ n'apparaissent plus à droite.
  - × on passe d'**une** somme sur $[\![1,2p]\!]$ à **deux** sommes sur $[\![1,p]\!]$.

☐

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question ***3.*** : $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

Démonstration.

- Par définition : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
  Or, en appliquant l'égalité de la question précédente pour $x = 1$ et $p = n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^1} - \frac{1}{2^{1-1}}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^1} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.}$$

- De plus :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{\cancel{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{n}}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$$ *(avec le changement d'indice $j = n+k$)*

$$\boxed{\text{D'où : } v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}}$$

☐

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$v_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

  où la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur le segment $[0,1]$.

- On reconnaît une somme de Riemann, ce qui démontre :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx$$

  Or :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \;=\; \Big[\ \ln\left(|1+x|\right)\ \Big]_0^1 \;=\; \ln\left(|2|\right)-\ln\left(|1|\right) \;=\; \ln(2)-\cancel{\ln(1)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi la suite } (v_n) \text{ converge et : } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(2).}$$

- Notons $x=1$. Par définition, on alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n \;=\; \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n \;=\; \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

  Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n}$. La suite (v_n) est donc une sous-suite de (u_n).
  Or, d'après la question ***2.b)***, la suite (u_n) converge vers $S(1)$.
  On en déduit que la suite (v_n) est elle aussi convergente et de même limite que (u_n).
  Par unicité de la limite, on conclut alors :

$$S(1) \;=\; \lim_{n\to+\infty} u_n \;=\; \lim_{n\to+\infty} v_n \;=\; \ln(2)$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } S(1) \;=\; \ln(2).}$$

□

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)*** : $S(2) \;=\; \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

- On réitère le procédé de la question ***4.*** : on applique l'égalité de la question ***3.*** avec les paramètres $x=2$ et $p=n$.
  En utilisant la donnée de l'énoncé $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} & - & \displaystyle\frac{1}{2^{2-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} & & \\
{\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & \\
S(2) & = & \dfrac{\pi^2}{6} & - & \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi^2}{6} & = & \dfrac{\pi^2}{12}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } S(2) \;=\; \frac{\pi^2}{12}.}$$

□

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\text{e}^{-t}\, dt$.
On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\text{e}^t}\, dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\text{e}^t}\, dt$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^x}{1+\text{e}^t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :

  (i) $f_1 : t \mapsto \text{e}^{x\,\ln(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  - $h_1 : t \mapsto x\,\ln(t)$ est :
    × continue sur $]0,+\infty[$,
    × telle que $h_1\big(]0,+\infty[\big) \subseteq \mathbb{R}$.
  - $h_2 : t \mapsto \text{e}^t$ continue sur $\mathbb{R}$.

  (ii) $f_2 : t \mapsto 1+\text{e}^t$:
  - est continue sur $]0,+\infty[$.
  - ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f : t \mapsto \frac{t^x}{1+\text{e}^t} \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

Commentaire

On détaille ici précisément l'argumentation permettant de démontrer le caractère continu de f sur $]0,+\infty[$. Lors des concours, il n'est pas nécessaire de donner autant de détails tout au long de l'épreuve. Il est toutefois conseillé de faire cet effort de précision sur les premières questions, de sorte à faire bonne impression auprès du correcteur.

- L'intégrale (doublement) impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente

  $\Leftrightarrow$ Les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ sont convergentes

- Déterminons la nature de $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\, dt$.

  × $\forall t \in]0,1]$, $t^x = \text{e}^{x\,\ln(t)} \geqslant 0$.
  × $f(t) = \dfrac{t^x}{1+\text{e}^t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\, t^x$.
  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^{-x}}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant $-x$.
  Elle est convergente si et seulement si $-x < 1$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues} \\ \text{positives, l'intégrale impropre } \displaystyle\int_0^{1} f(t)\, dt \text{ est convergente si et seulement si } x > -1.\end{array}}$$

- Déterminons maintenant la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$.

  × $\forall t \in\ [1,+\infty[,\ f(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

  × $f(t) = \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. En effet :

$$\frac{\frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^{x+2}}{1+\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{x+2}}{\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  par croissances comparées (si $x+2>0$) ou par opérations usuelles sur les limites (si $x+2 \leqslant 0$).

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2>1)$. Elle est donc convergente.

Ainsi, par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\ dt$ est donc convergente si et seulement si $x > -1$. □

7. Soit $x \in\ ]-1,+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0;+\infty[,\ t \mapsto \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_x(t) = (-1)^n\, g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, t^x\, \mathrm{e}^{-kt}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, t^x\, \mathrm{e}^{-kt} &= -t^x \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^k \\
&= -t^x \sum_{k=1}^{n} \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^k \\
&= -t^x\ \frac{\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^1 - \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n+1}}{1-\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)} && \textit{(car } -\mathrm{e}^{-t} \neq 1\textit{)} \\
&= t^x\ \frac{\mathrm{e}^{-t} + \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n+1}}{1+\mathrm{e}^{-t}} \\
&= t^x\ \frac{1-\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^n}{\mathrm{e}^t+1} && \textit{(en multipliant par } \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t}}\textit{)} \\
&= \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} - \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\ \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^n \\
&= \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} - \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\ (-1)^n\ \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n \\
&= g_x(t) - (-1)^n\, g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_x(t) = (-1)^n\, g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, t^x\, \mathrm{e}^{-kt}}$$ □

b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \, \mathrm{e}^{-kt} \, dt$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x \, \mathrm{e}^{-kt} \, dt = \frac{1}{k^{x+1}} \, \Gamma(x+1)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On effectue le changement de variable $\boxed{u = kt}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = kt \quad \text{(et donc } t = \frac{1}{k}\, u) \\ \hookrightarrow du = k \;\, dt \quad \text{ et } \quad dt = \frac{1}{k}\; du \\ \bullet \; t = 0 \;\Rightarrow\; u = 0 \\ \bullet \; t = +\infty \;\Rightarrow\; u = +\infty \end{array} \right.$$

- Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto \dfrac{1}{k}\, u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
  On obtient alors :
  $$\int_0^{+\infty} t^x \, \mathrm{e}^{-kt} \, dx \;=\; \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{k}\, u\right)^x \mathrm{e}^{-u} \frac{1}{k} \, du \;=\; \left(\frac{1}{k}\right)^{x+1} \int_0^{+\infty} u^x \, \mathrm{e}^{-u} \, du$$
  L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^x \, \mathrm{e}^{-u} \, du$ étant convergente, il en est de même de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \, \mathrm{e}^{-kt} \, dx$.

$$\boxed{\text{On obtient enfin : } \int_0^{+\infty} t^x \, \mathrm{e}^{-kt} \, dx \;=\; \frac{1}{k^{x+1}} \int_0^{+\infty} u^{(x+1)-1} \, \mathrm{e}^{-u} \, du \;=\; \frac{1}{k^{x+1}} \, \Gamma(x+1).}$$
□

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t) \, \mathrm{e}^{-nt} \, dt$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t) \, \mathrm{e}^{-nt} \, dt$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t > 0$.

Tout d'abord			$1 + \mathrm{e}^t$	$\geqslant$	1	*(car* $\mathrm{e}^t \geqslant 0$*)*
ensuite	0	$\leqslant$	$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$	$\leqslant$	1	*(par croissance de la fonction inverse sur* $]0, +\infty[$*)*
enfin	0	$\leqslant$	$\dfrac{t^x \, \mathrm{e}^{-nt}}{1+\mathrm{e}^t}$	$\leqslant$	$t^x \, \mathrm{e}^{-nt}$	*(car* $t^x = e^{x \ln(t)} > 0$ *et* $e^{-nt} > 0$*)*

- On a :
  × $\forall t > 0$, $0 \leqslant \dfrac{t^x \, \mathrm{e}^{-nt}}{1+\mathrm{e}^t} \leqslant t^x \, \mathrm{e}^{-nt}$.
  × L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \, \mathrm{e}^{-nt}$ est convergente d'après la question ***7.b)***.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues} \\ \text{positives, l'intégrale impropre } \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t) \, \mathrm{e}^{-nt} \, dt \text{ est convergente.}\end{array}}$$

- D'après l'inégalité précédente et par croissance de l'intégration, le bornes étant dans l'ordre croissant :
$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \;=\; \frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}}$$

- Or :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}} = 0$ car $x+1>0$ (on a supposé dans l'énoncé $x>-1$).

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après le théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt} = 0.}$$

□

d) En déduire la relation : $I(x) = S(x+1)\,\Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la Partie **I**.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***7.a)*** :
$$g_x(t) = (-1)^n\,g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\,t^x\,\mathrm{e}^{-kt}$$
Comme l'intégrale impropre de chaque fonction apparaissant dans cette égalité est convergente (d'après ce qui précède), on peut intégrer de part et d'autre :
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g_x(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} \left((-1)^n\,g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\,t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\right)dt \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\,dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(x+1)}{k^{x+1}} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt + \Gamma(x+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}}
\end{aligned}$$
Remarquons alors :

× $$\begin{aligned}
\left|(-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt\right| &= |(-1)^n| \left|\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |0| = 0 && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = 0$.

× comme $x>-1$, alors $x+1>0$.
Ainsi, d'après la Partie **I**, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{x+1}}$ est convergente et :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} = S(x+1)$$

On en déduit que la partie droite de l'égalité admet une limite et :

$$\begin{array}{rl} & \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\ dt \\ = & \lim\limits_{n \to +\infty} \left((-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\ dt + \Gamma(x+1) \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} \right) \\ = & \lim\limits_{n \to +\infty} \left((-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\ dt \right) \ + \ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\Gamma(x+1) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} \right) \\ = & 0 \ + \ \Gamma(x+1) \underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} \right)}_{S(x+1)} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Et comme } \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\ dt = \lim\limits_{n \to +\infty} I(x) = I(x), \text{ on obtient bien :} \\ I(x) \ = \ \Gamma(x+1)\, S(x+1) \end{array}}$$

□

8. En utilisant la Partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.

Démonstration.
En utilisant la formule précédente pour $x = 1 \in \left]-1, +\infty\right[$:

$$\begin{array}{rcll} I(1) & = & \Gamma(2)\, S(2) & \\ & = & (1!)\, S(2) & \textit{(d'après le rappel au début de la Partie } \mathbf{II}\textit{)} \\ & = & \dfrac{\pi^2}{12} & \textit{(d'après la question } \mathbf{5.}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{I(1) = \dfrac{\pi^2}{12}}$$

□

Exercice 3 (EML 2020)

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0,1[, \ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\,\big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big)$$

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
  - × $f_1 : x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$ car elle est la composée $f_1 = g_2 \circ g_1$ où :
    - – $g_1 : x \mapsto 1-x$ est :
      - ▸ dérivable sur $]0,1[$,
      - ▸ telle que : $g_1\big(]0,1[\big) \subseteq \,]0,1[$.
    - – $g_2 : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0,1[$.
  - × $f_2 : x \mapsto \ln(x)$:
    - – est dérivable sur $]0,1[$,
    - – NE S'ANNULE PAS sur $]0,1[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur }]0,1[.}$$

- Soit $x \in \,]0,1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-1}{1-x}\,\ln(x) - \ln(1-x)\,\frac{1}{x}}{\big(\ln(x)\big)^2} \\ &= \frac{\frac{-x\,\cancel{(1-x)}}{\cancel{1-x}}\,\ln(x) - \ln(1-x)\,\frac{\cancel{x}\,(1-x)}{\cancel{x}}}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2} \\ &= \frac{-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in \,]0,1[, \ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\,\big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big).}$$

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension de ce point, on a rédigé en détails la dérivabilité de la fonction f_1 qui est obtenue comme composée ($f_2 = g_2 \circ g_1$). Mais un tel niveau de détails n'est certainement pas attendu par les correcteurs.

Commentaire

- De manière générale, il n'est pas nécessaire de rédiger aussi précisément les questions portant sur la régularité de fonctions. Il est conseillé :
  × de rédiger très proprement la régularité d'une fonction pour les questions que l'on traite en premier. On démontre ainsi au correcteur sa capacité à rédiger ce type de questions et on pourra alors réduire le niveau de détail pour les questions suivantes.
  × de rédiger très proprement la régularité lorsqu'il s'agit du cœur de la question (« Démontrer que la fonction est continue / de classe $\mathcal{C}^1$ sur ... »

  Dans les autres cas, on pourra se contenter d'écrire que la fonction f est dérivable sur J (intervalle à déterminer) car elle est la composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats. Évidemment, cela n'apportera pas de point si l'intervalle J n'est pas le bon.
- Les précisions apportées dans cette question permettent de rappeler la formule de dérivation d'une composée. On a :

$$\forall x \in \,]0,1[,\ (g_2 \circ g_1)'(x) = g_2'\big(g_1(x)\big) \times g_1'(x)$$

  Ici on a : $g_1'(x) = -1$. Il est évidemment primordial de ne pas oublier ce terme dans l'obtention de la dérivée. L'énoncé donne ici la solution ce qui permet de vérifier que l'on n'a pas commis ce type d'erreur.

□

2. a) Justifier : $\forall t \in \,]0,1[,\ t\ \ln(t) < 0$.

Démonstration.
Soit $t \in \,]0,1[$.

$$\begin{array}{lll} \text{Alors} & \ln(t) < 0 & \textit{(par définition de la fonction } \ln\textit{)} \\ \text{donc} & t\ \ln(t) < 0 & \textit{(par multiplication par } t > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in \,]0,1[,\ t\ \ln(t) < 0}$$

□

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,1[$.

- D'après la question ***1.***, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\ \big(-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x)\big)$$

  Or : $x > 0$, $1-x > 0$ et $\big(\ln(x)\big)^2 > 0$. Ainsi : $x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2 > 0$.
  On en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de la quantité $-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x)$.
- En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = x \in \,]0,1[$, on obtient : $x\ \ln(x) < 0$ et donc $-x\ \ln(x) > 0$.
- En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = 1-x \in \,]0,1[$, on obtient : $(1-x)\ \ln(1-x) < 0$ et donc $-(1-x)\ \ln(1-x) > 0$.

Ainsi : $-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x) > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit : } \forall x \in \,]0,1[,\ f'(x) > 0. \\ \text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur }]0,1[. \end{array}}$$

Commentaire

La propriété démontrée dans la question précédente a été démontrée pour tout $t \in]0,1[$. On ne peut donc l'utiliser que pour un réel $t \in]0,1[$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat. □

3. ***a)*** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

Démonstration.

- Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$.
- Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = \ln(1) = 0$, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = 0 \times 0 = 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en posant } f(0) = 0.}$$ □

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

Démonstration.
Soit $x \in]0,1[$.

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} - 0}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x\ \ln(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{x\ \ln(x)} = \frac{-1}{\ln(x)}$$

Or : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{\ln(x)} = 0$.
La fonction taux d'accroissement $\tau_0(f)$ admet donc une limite finie lorsque $x \to 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } f \text{ est dérivable en 0, de dérivée } f'(0) = 0.}$$ □

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty$.
- En posant $t = 1-x$, on obtient : $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = \lim\limits_{t\to 0} \ln(t) = -\infty$.

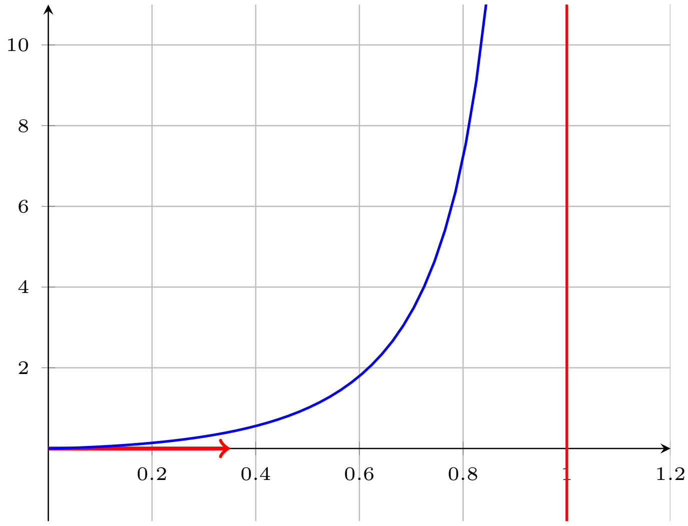
  On en déduit, par produit de limites :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = +\infty$$

$$\boxed{\text{Comme } \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty, \text{ la droite } x = 1 \text{ est une asymptote verticale de la courbe représentative de } f.}$$ □

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Démonstration.



□

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$.

- La fonction h_n est une fonction polynomiale (de degré n).
  Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$h_n'(x) \ = \ n\ x^{n-1} + 1$$

  Comme $x \geqslant 0$, alors : $x^{n-1} \geqslant 0$. Ainsi : $n\ x^{n-1} + 1 \geqslant 1 > 0$.
  On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h_n'(x)$	$+$
h_n	$-1 \nearrow +\infty$

- La fonction h_n est :
  - × continue sur $[0, +\infty[$,
  - × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $h_n([0, +\infty[)$. Or :

$$h_n([0, +\infty[) \ = \ [h_n(0), \lim_{x \to +\infty} h_n(x)[\ = \ [-1, +\infty[$$

  Comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } (E_n) \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+ \text{ notée } u_n.}$$

□

7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons :
  - $\times$ $h_n(0) = -1$.
  - $\times$ $h_n(u_n) = 0$, par définition.
  - $\times$ $h_n(1) = 1$.

  Ainsi :
$$h_n(0) \ < \ h_n(u_n) \ < \ h_n(1)$$
- Or, d'après le théorème de la bijection, $h_n^{-1} : [-1,+\infty[\ \to [0,+\infty[$ est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. En appliquant h_n^{-1}, on obtient alors :
$$\begin{array}{ccccc} h_n^{-1}\big(h_n(0)\big) & < & h_n^{-1}\big(h_n(u_n)\big) & < & h_n^{-1}\big(h_n(1)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_n & & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \in \ ]0,1[.}$$

□

8. Déterminer u_1 et u_2.

Démonstration.

- Par définition, u_1 est l'unique solution positive de l'équation : $h_1(x) = 0$. Or :
$$h_1(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x^1 + x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ 2\,x = 1 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } u_1 = \frac{1}{2}.}$$
- Par définition, u_2 est l'unique solution positive de l'équation : $h_2(x) = 0$. Or :
$$h_2(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + x - 1 = 0$$
  Notons $P(X) = X^2 + X - 1$ le polynôme de degré 2 associé à la fonction h_2.
  Ce polynôme admet pour discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.
  Ainsi, P admet deux racines :
$$x_- = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad x_+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
  Comme $5 \geqslant 1$, alors : $\sqrt{5} \geqslant \sqrt{1} = 1$ et ainsi : $\sqrt{5} - 1 \geqslant 0$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$$

□

9. a) Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while ...
        c = (a + b) / 2
        if (c ^ n + c - 1) > 0 then
            ...
        else
            ...
        end
        u = ...
    end
endfunction
```

Démonstration.

- Afin de bien comprendre tous les mécanismes en jeu, on se permet d'apporter une réponse très détaillée à cette question, accompagnée d'un aparté sur la méthode de recherche par dichotomie. Il faut toutefois garder en tête qu'un tel niveau de détail n'est pas du tout attendu lors des concours. Fournir la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
  Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie

Données :

× une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

× un intervalle de recherche $[a, b]$,

× une précision de recherche ε.

Résultat : une valeur approchée à ε près d'un zéro (sur l'intervalle $[a, b]$) de la fonction f.
Autrement dit, une valeur approchée (à ε près) d'un réel $x \in [a, b]$ tel que : $f(x) = 0$.

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :

  × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de f.
  Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.

  × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de f.
  Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

  La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.
  On itère jusqu'à obtenir un intervalle I contenant un zéro de f et de largeur plus faible que ε.
  Les points de cet intervalle I sont tous de bonnes approximations du zéro de f contenu dans I.

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur l'**intervalle** $[a,b]$.

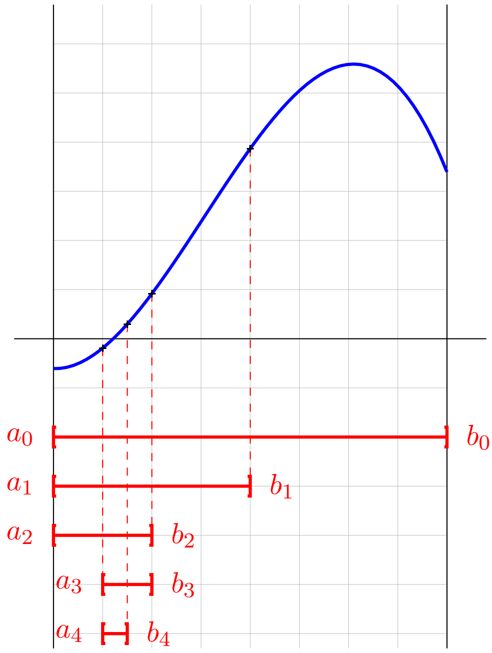
Supposons : $f(a)\ f(b) \leqslant 0$.

Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Calcul des suites (a_m), (b_m), (c_m)

Cas $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$

- Initialement, $a_0 = a$, $b_0 = b$
- À chaque tour de boucle (tant que $b_m - a_m > \varepsilon$) :
  - × $c_m = \dfrac{a_m + b_m}{2}$ (point milieu de $[a_m, b_m]$)
  - × si $f(c_m) < 0$ alors :
    - ∗ $a_{m+1} = c_m$
    - ∗ $b_{m+1} = b_m$
  - × si $f(c_m) \geqslant 0$ alors :
    - ∗ $a_{m+1} = a_m$
    - ∗ $b_{m+1} = c_m$



- On construit ainsi une suite $\big([a_m, b_m]\big)_{m\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés :
  × contenant tous un zéro de f,
  × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche une valeur de x telle que : $h_n(x) = 0$.
  On se fixe initialement l'intervalle de recherche $[0,1]$ de sorte que l'équation $h_n(x) = 0$ ne possède qu'une solution, à savoir la valeur u_n qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables `a` et `b` destinées à contenir les valeurs succesives de a_m et b_m. Ces variables sont initialisées respectivement à 0 et 1.

```
  a = 0
  b = 1
```

On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision 10^{-3} escomptée.

```
  while (b-a) > 10 ^ (-3)
```

On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

```
    c = (a+b) / 2
```

Puis on teste si $h_n(\mathtt{c}) > 0$.
Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de gauche.

```
    if (c ^ n + c - 1) > 0 then
      b = c
```

Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de droite.

```
    else
      a = c
    end
```

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que 10^{-3} et contient un zéro de h_n. Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à 10^{-3} près de ce zéro.
On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

```
    u = a
```

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

```
    u = b
```

Ou encore le point milieu :

```
    u = (a + b) / 2
```

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus $\dfrac{10^{-3}}{2}$ de ce point milieu.
On obtient ainsi une valeur approchée à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ du zéro recherché.

Commentaire

- On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :
  - × l'intervalle de recherche initial $[0, 1]$ est de largeur 1.
  - × la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.
    À la fin du $m^{\text{ème}}$ tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur $\dfrac{1}{2^m}$.
  - × l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que 10^{-3}.

  On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{2^m} \leqslant 10^{-3} & \Leftrightarrow & 2^m \geqslant 10^3 & \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(2^m\right) \geqslant \ln\left(10^3\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & m\ \ln(2) \geqslant 3\ \ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & m \geqslant 3\ \dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $\left\lceil 3\ \dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ tours de boucle suffisent.

  On retiendra que si l'on souhaite obtenir une précision de 3 chiffres après la virgule, il suffit d'effectuer de l'ordre de 3 tours de boucle. Cet algorithme est donc extrêmement rapide.

- On obtient le programme complet suivant.

```
function u = valeur_approchee(n)
  a = 0
  b = 1
  while (b-a) > 10 ^ (-3)
    c = (a+b) / 2
    if (c ^ n + c - 1) > 0 then
      b = c
    else
      a = c
    end
  end
  u = a
endfunction
```

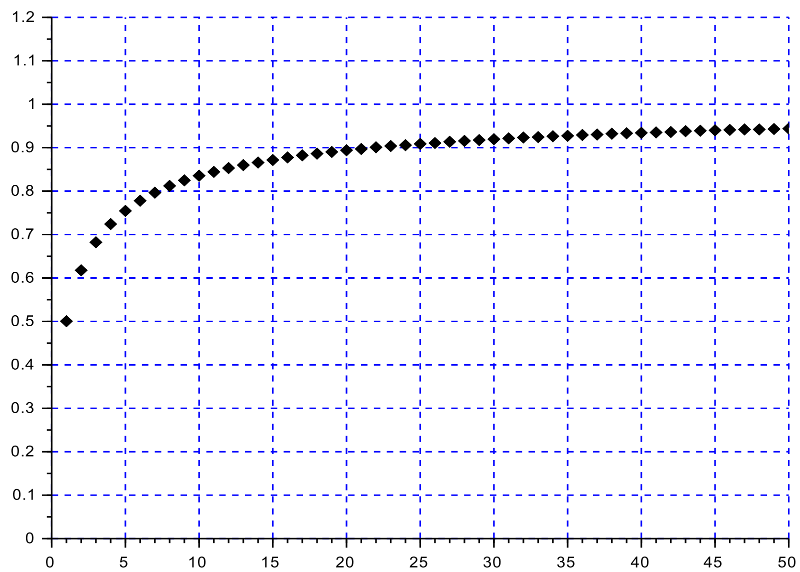
Commentaire

Dans le programme à trous donné par l'énoncé, l'instruction :

```
11    u = ...
```

apparaît en ligne 11, comme dernière instruction de la boucle. Dans ce cas, l'affectation `u = a` va être effectuée à chaque tour de boucle. Ainsi, la valeur de la variable `u` est écrasée à chaque tour de boucle. Il en résulte que la variable `u` contient en fin de boucle la dernière valeur qui lui a été affectée. De ce fait, on peut s'interroger sur la pertinence d'une telle présentation. Comme seule la dernière affectation `u = a` permet de définir la valeur de la variable `u`, il apparaît bien plus raisonnable d'effectuer cette instruction une seule fois en sortie de boucle. C'est le choix qui est fait dans ce corrigé. □

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



Démonstration.
Le graphe permet d'effectuer les conjectures suivantes :

× la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante,

× la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par $\frac{1}{2}$,

× la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1,

× la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite 1.

Commentaire

On lit sur ce graphe les valeurs :

$$u_1 = 0.5 \qquad \text{et} \qquad u_2 \simeq 0.61$$

Cela permet de vérifier les résultats donnés en question ***8***.

En particulier, 0.61 est bien une valeur approchée de la quantité $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

□

10. a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} \\ &= \frac{\ln\left({u_n}^n\right)}{\ln(u_n)} \qquad \textit{(car } {u_n}^n = 1-u_n \textit{ par définition de } u_n\textit{)} \\ &= \frac{n\,\cancel{\ln(u_n)}}{\cancel{\ln(u_n)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u_n) = n.}$$

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$f(u_n) = n \ \leqslant\ n+1 = f(u_{n+1})$$

- Or, d'après l'étude en ***Partie A***, la fonction f réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $f^{-1} :]0,+\infty[\to]0,1[$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
En appliquant f^{-1}, on obtient alors :

$$\underbrace{f^{-1}\big(f(u_n)\big)}_{=\,u_n} \ \leqslant\ \underbrace{f^{-1}\big(f(u_{n+1})\big)}_{=\,u_{n+1}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant u_{n+1}. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

Commentaire

- La **Partie B** consiste en l'étude de la suite (u_n). On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution positive de l'équation $h_n(x) = 0$

  On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction h_n.
- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ h_m(u_m) = 0}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (u_n).
  On l'utilise en question ***7***.
- La question ***10.a)*** établit une propriété équivalente à cette propriété de définition de la suite (u_n), à savoir : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ f(u_m) = m}$.
  C'est de cette propriété dont on se sert ici (en $m = n$ et $m = n+1$) pour démontrer la monotonie de la suite (u_n). Comme la suite (u_n) est définie de manière implicite, cette étude ne se réalise pas directement en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

  $$f(u_n) \ \leqslant\ f(u_{n+1})$$

  et de conclure : $u_n \ \leqslant\ u_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f. $\square$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- D'après ce qui précède, la suite (u_n) est :
  - $\times$ croissante,
  - $\times$ majorée par 1 (on démontre en question ***7.*** : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \,]0,1[$).

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \ell \in [0,1].}$$

Commentaire

- On rappelle que, par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent **larges**. Plus précisément :

  $$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > a \\ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \ell \geqslant a$$

- On pourra retenir l'exemple classique de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$:
  - $\times$ d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$
  - $\times$ d'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \not> 0$

- Par ailleurs, comme la suite (u_n) est croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \geqslant u_1 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en conclut, par passage à la limite : } \ell \geqslant \frac{1}{2}.}$$

- Démontrons alors $\ell = 1$. Pour ce faire, on procède par l'absurde.
  On suppose : $\ell \neq 1$. D'après ce qui précède, on a donc : $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[$.
  La fonction f est continue en $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[\subseteq]0, 1[$. Ainsi, la suite $\big(f(u_n)\big)$ est convergente de limite $f(\ell) \in \mathbb{R}$. Par passage à la limite dans l'égalité définie en ***10.a)***, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} f(u_n) & = & n \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} \\ f(\ell) & & +\infty \end{array}$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \ell = 1.}$$

$\square$