

---

## DS3 (version A) /193

---

### Exercice 1 /31

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle  $AM = MB$ , d'inconnue  $M$ , dans l'espace vectoriel  $E$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si  $U_1, U_2, U_3, U_4$  sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  est une base de  $E$ , qui est donc de dimension 4. Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $E$ , l'ensemble des matrices  $M$  de  $E$  vérifiant  $AM = MB$  est noté  $V_{A,B}$ .

1. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $E$  et  $\varphi_{A,B}$  l'application qui, à toute matrice  $M$  de  $E$ , associe la matrice  $AM - MB$ .

a) Montrer que  $\varphi_{A,B}$  est un endomorphisme de  $E$  et en déduire que  $V_{A,B}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- 1 pt : caractère endo

- 2 pts :  $\varphi_{A,B}$  linéaire

- 2 pts :  $V_{A,B} = \text{Ker}(\varphi_{A,B})$

**On donne 2 pts aussi pour la démonstration  $V_{A,B}$  est un sev de  $E$  (1 pt pour partie non vide, 1 pt pour stabilité par CL)**

b) Dans le cas particulier où  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente  $\varphi_{A,B}$  dans la base  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ .

Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble  $V_{A,B}$ .

- 1 pt :  $\text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt  $\text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt :  $\text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt :  $\text{Mat}_{U_1, U_2, U_3, U_4}(\varphi_{A,B}(U_4)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2 pts :  $\text{rg}(C) = 4$

- 1 pt :  $C$  inversible

- 1 pt :  $\varphi_{A,B}$  isomorphisme, donc injective

- 1 pt :  $V_{A,B} = \text{Ker}(\varphi_{A,B}) = \{0\}$

2. Dans cette question,  $r$  et  $s$  désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  une matrice quelconque de  $E$ .

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur  $x, y, z, t$  pour que  $M$  appartienne à  $V_{D,\Delta}$ .

- 1 pt : écriture système 
$$\begin{cases} x & = & x \\ y & = & sy \\ rz & = & z \\ rt & = & st \end{cases}$$

- 2 pts : résolution  $y = z = t = 0$  (dont 1 pt pour  $r \neq 1$  et  $s \neq 1$  et  $r \neq s$ )

b) En déduire une base de  $V_{D,\Delta}$ .

- 2 pts :  $V_{D,\Delta} = \text{Vect}(U_1)$  avec  $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (0 si confusion d'objets)

- 1 pt : la famille  $(U_1)$  est génératrice de  $V_{D,\Delta}$

- 1 pt : la famille  $(U_1)$  est libre car constituée uniquement d'un vecteur non libre

3. Soit  $a, b, c, d$  des réels non nuls vérifiant  $a - b \neq c - d$ ,  $a - b \neq 1$ ,  $c - d \neq 1$ ,  $A$  et  $B$  les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

On admet qu'il existe :

× une matrice inversible  $P$  de  $E$  telle que  $A = PDP^{-1}$  où  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ .

× une matrice inversible  $Q$  de  $E$  telle que  $B = Q\Delta Q^{-1}$  où  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$ .

Pour toute matrice  $M$  de  $E$ , montrer qu'elle appartient à  $V_{A,B}$  si et seulement si la matrice  $P^{-1}MQ$  appartient à  $V_{D,\Delta}$ . En déduire une base de  $V_{A,B}$ .

- 1 pt :  $AM = MB \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MQ\Delta Q^{-1} \Leftrightarrow \cancel{P^{-1}(PDP^{-1}M)Q} = P^{-1}(MQ\Delta Q^{-1})Q$

- 1 pt :  $\dots \Leftrightarrow D(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)\Delta = 0 \Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$

- 1 pt :  $\dots \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, P^{-1}MQ = \alpha \cdot U_1$

- 1 pt :  $\dots \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha \cdot PU_1Q^{-1} \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(PU_1Q^{-1})$

- 1 pt : la famille  $(PU_1Q^{-1})$  génératrice de  $V_{A,B}$

- 1 pt : la famille  $(PU_1Q^{-1})$  est libre car  $PU_1Q^{-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

4. Dans cette question  $r, s$  et  $u, v$  désignent quatre réels vérifiant  $r \neq s, r \neq v, u \neq s, u \neq v$ , et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Par une méthode analogue à celle de la question 2, déterminer  $V_{D,\Delta}$ .

- 1 pt : écriture système 
$$\begin{cases} ux & = & vx \\ uy & = & sy \\ rz & = & vz \\ rt & = & st \end{cases}$$

- 2 pts : résolution système  $x = y = z = t = 0$  car  $r \neq s, r \neq v, u \neq s$  et  $u \neq v$

- 1 pt :  $V_{D,\Delta} = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$  (0 si confusion d'objets)

## Exercice 2 /70

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , dans laquelle on effectue une succession de  $(n + 1)$  tirages d'une boule avec remise et l'on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, la variables  $X_n$  prend ses valeurs dans  $\llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ .

Par exemple, si  $n = 5$  et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors  $X_5 = 4$ .

Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ , on note  $N_k$  la variable aléatoire égale au numéro obtenu au  $k^{\text{ème}}$  tirage.

### Partie I : Étude du cas $n = 3$ /14

On suppose dans cette partie **uniquement** que  $n = 3$ .

L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. a) Exprimer l'événement  $[X_3 = 4]$  à l'aide d'événements faisant intervenir les variables  $N_1, N_2, N_3$ .  
En déduire  $\mathbb{P}([X_3 = 4])$ .

- 2 pts :  $[X_3 = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]$

- 3 pts :  $\mathbb{P}([X_3 = 4]) = \frac{1}{27}$

(1 pt pour indépendance des tirages, 1 pt pour  $N_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$ , 1 pt pour résultat)

b) Montrer que  $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{2}{3}$ , et en déduire  $\mathbb{P}([X_3 = 3])$ .

- 2 pts :  $[X_3 = 2] = [N_1 = 1] \cup \left( [N_1 = 2] \cap [N_2 \geq 2] \right) \cup \left( [N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \right)$

- 2 pts :  $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{2}{3}$  (« de même » 1 pt : incompatibilité, 1 pt : indépendance)

- 1 pt :  $([X_3 = i])_{i=\llbracket 2, 4 \rrbracket}$  est un système complet d'événements  
donc  $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = 1 - \mathbb{P}([X_3 = 2]) - \mathbb{P}([X_3 = 4])$

- 1 pt :  $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \frac{8}{27}$

2. Calculer l'espérance de  $X_3$ .

- 1 pt :  $X_3$  admet une espérance car finie

- 2 pts :  $\mathbb{E}(X_3) = \frac{64}{27}$  (1 pt pour la formule, 1 pt pour le résultat)

### Partie II : Cas général /39

Dans toute cette partie,  $n$  est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ , reconnaître la loi de  $N_k$  et rappeler son espérance et sa variance.

- 2 pts :  $N_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  (1 pt pour décrire l'expérience / 1 pt pour décrire la v.a.r. )

- 1 pt :  $\mathbb{E}(N_k) = \frac{n+1}{2}$

- 1 pt :  $\mathbb{V}(N_k) = \frac{n^2-1}{12}$

4. Calculer  $\mathbb{P}([X_n = n + 1])$ .

- **2 pts** :  $[X_n = n + 1] = \bigcap_{i=1}^n [N_i = n + 1 - i]$  (ou  $[X_n = n + 1] = [N_1 = n] \cap \dots \cap [N_n = 1]$ )

- **2 pts** :  $\mathbb{P}([X_n = n + 1]) = \left(\frac{1}{n}\right)^n$  (**1 pt pour indépendance, 1 pt pour  $N_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$** )

5. Montrer, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :  $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \frac{n-i+1}{n}$ .

- **1 pt** : si  $[N_1 = i]$  est réalisé, c'est que ...

- **1 pt** : Dans ce cas,  $[X_n = 2]$  est réalisé ssi ...

6. En déduire une expression simple de  $\mathbb{P}([X_n = 2])$ .

- **1 pt** :  $([N_1 = i])_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est un système complet d'événements

- **1 pt** : **FPT**  $\mathbb{P}([X_n = 2]) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [X_n = 2])$

- **3 pts** :  $\mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{n+1}{2}$

× **1 pt** pour utilisation qst précédente

× **1 pt** pour changement d'indice  $j = n - i + 1$

× **1 pt** pour fin calcul

7. Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Justifier l'égalité d'événements suivante :  $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \dots > N_k]$ .

En déduire que  $\mathbb{P}([X_n > k]) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$ .

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour  $k = 0$  et pour  $k = 1$ .

- **2 pts** : **justification**  $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \dots > N_k]$  (suivant la rédaction)

- **3 pts** :  $\text{Card}([X_n > k]) = \binom{n}{k} n^{n+1-k}$  et  $\text{Card}(\Omega) = n^{n+1}$

× **1 pt** :  $\binom{n}{k}$  est le nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments

× **1 pt** :  $\binom{n}{k}$  est le nombre de séquence strictement croissante de  $k$  éléments

× **1 pt** :  $\mathbb{P}([X_n > k]) = \frac{\text{Card}([X_n > k])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k} n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$

- **1 pt** : formule vraie pour  $k = 0$

- **1 pt** : formule vraie pour  $k = 1$

8. Exprimer, pour tout  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}([X_n = k])$  à l'aide de  $\mathbb{P}([X_n > k - 1])$  et de  $\mathbb{P}([X_n > k])$ .

- **2 pts** :  $[X_n > k - 1] = [X_n = k] \cup [X_n > k]$  (dont **1 pt** pr  $X_n$  est à valeurs entières)

- **1 pt** :  $[X_n = k]$  et  $[X_n > k]$  incompatibles

- **1 pt** :  $\mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X_n > k - 1]) - \mathbb{P}([X_n > k])$

9. En déduire :  $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n > k])$ . Calculer ensuite  $\mathbb{E}(X_n)$ .

- 1 pt :  $X_n$  admet une espérance car finie

- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n = k])$

- 4 pts :  $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n > k])$

× 1 pt :  $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k (\mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])) = \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n > k])$

× 1 pt :  $= \sum_{k=1}^n (k+1) \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n > k])$   
 $= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X_n > k]) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n > k])$

× 1 pt :  $= 1 \times \mathbb{P}([X_n > 1]) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X_n > k]) - (n+1) \mathbb{P}([X_n > n+1])$

× 1 pt :  $= 1 \times \mathbb{P}([X_n > 0]) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X_n > k]) - \cancel{(n+1) \mathbb{P}([X_n > n+1])}$

- 2 pts :  $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n > k]) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \times \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

10. Montrer :  $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$ .

- 1 pt : utilisation qst 8.  $\mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])$

- 1 pt : qst 7.  $\mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k]) = \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$

- 1 pt : appliquer  $k \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k-1}$  en  $m = n+1$

- 1 pt : triangle de Pascal  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

- 1 pt : cas  $k = n+1$

### Partie III : Une convergence en loi /15

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 2}$ .

11. Soit  $k$  un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{k-1}{k!}$ .

- 1 pt :  $(n+1)n(n-1) \dots ((n+1) - (k-1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k$

- 1 pt :  $\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k-1}{k!}$

- 1 pt :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{k-1}{k!}$

12. Montrer que la série  $\sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k!}$  converge et calculer sa somme.

- 1 pt : travail sur la somme partielle d'ordre  $N$

- 1 pt : 
$$\sum_{k=2}^N \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!}$$

- 1 pt : 
$$\dots = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} + 1$$

- 1 pt : reconnaître les sommes partielles d'ordre  $N-1$  et  $N$  de la série exponentielle de paramètre 1 qui est une série convergente

- 1 pt : 
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = e^1 - e^1 + 1$$

On admet qu'il existe une variable aléatoire  $Z$  à valeurs dans  $\llbracket 2, +\infty \llbracket$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que  $Z$  admet une espérance et la calculer. Comparer  $\mathbb{E}(Z)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$ .

- 1 pt :  $Z$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([Z = k])$  est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- 2 pts : 
$$\sum_{k=2}^N k \mathbb{P}([Z = k]) = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!}$$

(1 pt pour somme partielle et 1 pt pour décalage d'indice)

- 1 pt : 
$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e^1$$

- 1 pt : 
$$\mathbb{E}(X_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

- 1 pt : 
$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{1}{n} = 1$$

- 1 pt : 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = e^1 = \mathbb{E}(Z) \text{ (0 si suspicion de composition d'équivalents)}$$

## Exercice 3 /54

### Partie 1 /19

Dans cette partie, la lettre  $r$  désigne un entier naturel et  $x$  est un réel fixé de  $]0, 1[$ .

1. Montrer que lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ , on a :  $\binom{n}{r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$ .

- 1 pt :  $\binom{n}{r} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-(r-1))}{r!}$

- 1 pt : pour tout  $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$  :  $n-i \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$

- 1 pt :  $n \times (n-1) \times \dots \times (n-(r-1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^r$

- 1 pt :  $\binom{n}{r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$

2. a) Donner la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n$ .

- 1 pt :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n = 0$  (croissances comparées car  $\frac{1}{x} > 1$ )

b) En déduire que la série  $\sum \binom{n}{r} x^n$  est convergente.

- 4 pts : critère de convergence (1 pt pour positivité, 1 pt pour négligeabilité, 1 pt pour série de Riemann, 1 pt pour citation critère)

3. a) Pour tout entier naturel  $r$ , on pose :  $S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$ . Donner la valeur de  $S_0$ .

- 1 pt :  $S_r$  bien définie d'après qst précédente

- 1 pt :  $S_0 = \frac{1}{1-x}$

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal :  $(1-x)S_{r+1} = xS_r$ .

- 1 pt :  $(1-x)S_{r+1} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n+1}{r+1} x^{n+1} - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1}$  (décalage d'indice)

- 1 pt :  $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r}$

- 1 pt :  $\binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1}$

- 1 pt :  $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} = xS_r$

c) En déduire :  $\forall x \in ]0, 1[$ ,  $\forall r \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$ .

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

d) Donner enfin la valeur de  $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$ .

- 1 pt :  $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = x^{-r} \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = x^{-r} \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$

## Partie 2 /35

On désigne par  $\alpha$  et  $p$  deux réels de  $]0, 1[$ .

Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.

Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité  $\alpha$  de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité  $1 - \alpha$  d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité  $p$  et perd un euro avec la probabilité  $1 - p$ .

Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

- ×  $X$  le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.
- ×  $Y$  le nombre de manches gagnées par le joueur.
- ×  $G$  le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que  $X$ ,  $Y$  et  $G$  sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

4. a) Donner la loi de  $X$ .

(on pourra noter  $D_k$  l'événement « Le joueur ne joue pas la  $k^{\text{ème}}$  manche »)

- 1 pt :  $X(\Omega) = \mathbb{N}$

- 1 pt :  $[X = k] = \overline{D_1} \cap \dots \cap \overline{D_k} \cap D_{k+1}$

- 2 pts :  $\mathbb{P}([X = k]) = (1 - \alpha)^k \alpha$  (1 pt pour indépendance des manches, 1 pt pour  $\mathbb{P}(D_i) = \alpha$ )

b) On pose  $T = X + 1$ . Démontrer que  $T$  suit la loi géométrique de paramètre  $\alpha$ .

- 1 pt :  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$

- 2 pts :  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$

c) En déduire  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ .

- 2 pts :  $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\alpha}$  et  $\mathbb{V}(T) = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2}$

- 1 pt :  $\mathbb{E}(X) = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$  (par linéarité de l'espérance)

- 1 pt :  $\mathbb{V}(X) = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2}$

5. a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

Déterminer, en distinguant les cas  $k \leq n$  et  $k > n$  la probabilité  $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k])$ .

- 1 pt : Si l'événement  $[X = n]$  est réalisé c'est que .... Dans ce cas ...

- 1 pt : description de l'exp comme succession de  $n$  épreuves de Bernoulli ...

- 1 pt : conclusion  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

- 1 pt :  $\forall k > n, \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = 0$

b) En déduire à l'aide de la **Partie 1** la loi de  $Y$ .

-

- 1 pt : la formule de la question précédente est valable dans le cas  $n = 0$

- 1 pt :  $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements



- 1 pt : **FPT**  $\mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = k])$
- 1 pt :  $\mathbb{P}([X = n]) \neq 0$
- 1 pt :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1-\alpha)^n \alpha \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  (4.a) et 5.a)
- 1 pt :  $= \alpha (1-\alpha)^k p^k \frac{1}{(1 - (1-\alpha)(1-p))^{k+1}}$  (d'après 3.d) avec  $r = k$  et  $x = (1-\alpha)(1-p)$
- 1 pt :  $= \frac{\alpha}{p + \alpha - \alpha p} \left( \frac{(1-\alpha)p}{p + \alpha - \alpha p} \right)^k$
- 1 pt :  $\mathbb{P}([Y = k]) = \frac{\alpha}{p + \alpha - \alpha p} \left( 1 - \frac{\alpha}{p + \alpha - \alpha p} \right)^k$

6. Calculer l'espérance de  $Y$ , puis montrer que  $\mathbb{V}(Y) = \frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$ .

- 2 pts :  $Z = Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{\alpha}{p + \alpha - \alpha p}\right)$
- 1 pt :  $\mathbb{E}(Y) = \frac{p - \alpha p}{\alpha} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} p$
- 1 pt :  $\mathbb{V}(Y) = \frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$

7. a) Exprimer  $G$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

- 1 pt :  $G = 1 \cdot Y - 1 \cdot (X - Y) = 2Y - X$

b) En déduire l'espérance de  $G$ .

- 1 pt :  $G$  admet une espérance car est la combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance

- 1 pt :  $\mathbb{E}(G) = \frac{1-\alpha}{\alpha} (2p-1)$

8. a) On rappelle que :

- × l'appel `grand(m,N,'geom',p)` permet de simuler  $m$  échantillons de  $N$  v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre  $p$ .
- × l'appel `grand(m,N,'bin',n,p)` permet de simuler  $m$  échantillons de  $N$  v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi binomiale de paramètre  $(n,p)$ .

Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par  $X$  et  $Y$ .

```

1 alpha = input('entrer la valeur de alpha : ')
2 p = input('entrer la valeur de p : ')
3 X = ----
4 Y = ----
5 disp(X)
6 disp(Y)
    
```

- 2 pts :  $X = \text{grand}(1, 1, 'geom', \alpha) - 1$

- 2 pts :  $Y = \text{grand}(1, 1, 'bin', X, p)$

b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par  $G$ ?

- 2 pts (1 pt par ligne)

```

7 G = 2 * Y - X
8 disp(G)
    
```

## Exercice 4 /41

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire  $T$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Si  $F$  est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction  $D$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, D(t) = 1 - F(t) = 1 - \mathbb{P}([T \leq t]) = \mathbb{P}([T > t])$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

### Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que  $T$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  qui vérifie, pour tout entier naturel  $n$ ,  $D(n) \neq 0$ .

#### 1. Coefficient d'avarie.

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant  $n$  du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant  $n$ , sachant qu'il fonctionne encore à l'instant  $n - 1$ , c'est-à-dire le nombre  $\pi_n$  défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbb{P}_{[T > n-1]}([T = n])$$

a) Démontrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P}([T = n]) = \mathbb{P}([T > n - 1]) - \mathbb{P}([T > n])$$

En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

- **2 pts** :  $[T > n - 1] = [T \geq n] = [T > n] \cup [T = n]$  (**dont 1 pt pour  $T$  est à valeurs entières**)

- **1 pt** :  $[T = n]$  et  $[T > n]$  **sont incompatibles**

- **1 pt** :  $\mathbb{P}([T = n]) = D(n-1) - D(n)$

- **1 pt** :  $\mathbb{P}_{[T > n-1]}([T = n]) = \frac{\mathbb{P}([T > n - 1] \cap [T = n])}{\mathbb{P}([T > n - 1])}$

- **1 pt** :  $[T = n] \subset [T > n - 1]$

b) On suppose que  $p \in ]0, 1[$  et que  $T$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

(i) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire  $T$  ?

- **1 pt** :  $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p}$

(ii) Calculer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $D(n)$  en fonction de  $n$ .

- **1 pt** :  $[T \leq n] = \bigcup_{i=1}^n [T = i]$

- **1 pt** :  $([T = i])_{i \in [1, n]}$  **est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles**

- **1 pt** :  $\mathbb{P}([T = i]) = p(1-p)^{i-1}$  **car  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$**

- **1 pt** :  $\sum_{i=1}^n p(1-p)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i = \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)}$

(iii) En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'égalité :  $\pi_n = p$ .

- 1 pt :  $\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$  d'après 1.a)

- 1 pt :  $\dots = \frac{(1-p)^{n-1} - (1-p)^n}{(1-p)^{n-1}}$  d'après 1.b)

c) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif  $\alpha$  tel que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n = \alpha$ .

(i) Établir, pour tout entier naturel non nul  $n$ , l'égalité :  $D(n) = (1-\alpha) D(n-1)$ .

- 1 pt :  $\alpha = \pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$  d'après 1.a)

- 1 pt :  $D(n) = (1-\alpha) D(n-1)$  en réorganisant

(ii) En déduire que  $T$  suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

- 3 pts :  $D(n) = (1-\alpha)^n$  (1 pt pour initialisation, 2 pts pour hérédité)

- 1 pt :  $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

- 2 pts :  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$

## 2. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique.

a) Soit  $m$  un entier naturel.

Démontrer par récurrence sur  $n$ , pour tout entier naturel  $n$  vérifiant  $n \geq m$ , l'égalité :

$$\sum_{j=m}^n \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) (i) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $S_2$  égale à  $T_1 + T_2$ .

- 1 pt :  $(T_1 + T_2)(\Omega) \subset \llbracket 2, +\infty \llbracket$

- 1 pt :  $([T_1 = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$  est un système complet d'événements

- 1 pt : **FPT**  $\mathbb{P}([T_1 + T_2 = n]) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_1 = j] \cap [T_1 + T_2 = n])$

- 1 pt :  $\sum_{j=1}^{+\infty} = \sum_{j=1}^{n-1}$

- 1 pt :  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes

- 1 pt :  $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  et  $T_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

- 1 pt :  $\mathbb{P}([T_1 + T_2 = n]) = (n-1) p^2 (1-p)^{n-2}$

(ii) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $k$ , la loi de  $S_k$  est donnée par :

$$\forall n \geq k, \mathbb{P}([S_k = n]) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

- 1 pt : initialisation

- 7 pts :

× 1 pt :  $([T_{k+1} = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$  SCE et FPT

- × **1 pt** :  $[T_{k+1} = j] \cap [S_{k+1} = n] = [T_{k+1} = j] \cap [S_k + j = n]$
- × **1 pt** :  $\sum_{j=1}^{+\infty} = \sum_{j=1}^{n-k}$
- × **1 pt** :  $T_{k+1}$  et  $S_k$  sont indépendantes
- × **1 pt** :  $T_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  et par hypothèse de récurrence
- × **1 pt** : décalage d'indice  $\ell = n - j - 1$
- × **1 pt** pour question 2.a) avec  $j \leftarrow \ell$ ,  $m \leftarrow k - 1$  et  $n \leftarrow n - 2$ )