
DS3 (version A) /193

Exercice 1 /31

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M , dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E , qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E , l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E , associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E .

- 1 pt : caractère endo

- 2 pts : $\varphi_{A,B}$ linéaire

- 2 pts : $V_{A,B} = \text{Ker}(\varphi_{A,B})$

On donne 2 pts aussi pour la démonstration $V_{A,B}$ est un sev de E (1 pt pour partie non vide, 1 pt pour stabilité par CL)

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) .

Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

- 1 pt : $\text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt $\text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\text{Mat}_{U_1, U_2, U_3, U_4}(\varphi_{A,B}(U_4)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2 pts : $\text{rg}(C) = 4$

- 1 pt : C inversible

- 1 pt : $\varphi_{A,B}$ isomorphisme, donc injective

- 1 pt : $V_{A,B} = \text{Ker}(\varphi_{A,B}) = \{0\}$

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E .

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.

- 1 pt : écriture système
$$\begin{cases} x & = & x \\ y & = & sy \\ rz & = & z \\ rt & = & st \end{cases}$$

- 2 pts : résolution $y = z = t = 0$ (dont 1 pt pour $r \neq 1$ et $s \neq 1$ et $r \neq s$)

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

- 2 pts : $V_{D,\Delta} = \text{Vect}(U_1)$ avec $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (0 si confusion d'objets)

- 1 pt : la famille (U_1) est génératrice de $V_{D,\Delta}$

- 1 pt : la famille (U_1) est libre car constituée uniquement d'un vecteur non libre

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

On admet qu'il existe :

× une matrice inversible P de E telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

× une matrice inversible Q de E telle que $B = Q\Delta Q^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice M de E , montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

- 1 pt : $AM = MB \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MQ\Delta Q^{-1} \Leftrightarrow \cancel{P^{-1}(PDP^{-1}M)Q} = P^{-1}(MQ\Delta Q^{-1})Q$

- 1 pt : $\dots \Leftrightarrow D(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)\Delta = 0 \Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$

- 1 pt : $\dots \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, P^{-1}MQ = \alpha \cdot U_1$

- 1 pt : $\dots \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha \cdot PU_1Q^{-1} \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(PU_1Q^{-1})$

- 1 pt : la famille (PU_1Q^{-1}) génératrice de $V_{A,B}$

- 1 pt : la famille (PU_1Q^{-1}) est libre car $PU_1Q^{-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s, r \neq v, u \neq s, u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Par une méthode analogue à celle de la question 2, déterminer $V_{D,\Delta}$.

- 1 pt : écriture système
$$\begin{cases} ux & = & vx \\ uy & = & sy \\ rz & = & vz \\ rt & = & st \end{cases}$$

- 2 pts : résolution système $x = y = z = t = 0$ car $r \neq s, r \neq v, u \neq s$ et $u \neq v$

- 1 pt : $V_{D,\Delta} = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$ (0 si confusion d'objets)

Exercice 2 /70

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n + 1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 2, n + 1 \rrbracket$.

Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.

Pour tout k de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$ /14

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.

L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. a) Exprimer l'événement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3 .
En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

- 2 pts : $[X_3 = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]$

- 3 pts : $\mathbb{P}([X_3 = 4]) = \frac{1}{27}$

(1 pt pour indépendance des tirages, 1 pt pour $N_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$, 1 pt pour résultat)

b) Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

- 2 pts : $[X_3 = 2] = [N_1 = 1] \cup \left([N_1 = 2] \cap [N_2 \geq 2] \right) \cup \left([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \right)$

- 2 pts : $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{2}{3}$ (« de même » 1 pt : incompatibilité, 1 pt : indépendance)

- 1 pt : $([X_3 = i])_{i=\llbracket 2, 4 \rrbracket}$ est un système complet d'événements
donc $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = 1 - \mathbb{P}([X_3 = 2]) - \mathbb{P}([X_3 = 4])$

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \frac{8}{27}$

2. Calculer l'espérance de X_3 .

- 1 pt : X_3 admet une espérance car finie

- 2 pts : $\mathbb{E}(X_3) = \frac{64}{27}$ (1 pt pour la formule, 1 pt pour le résultat)

Partie II : Cas général /39

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

- 2 pts : $N_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ (1 pt pour décrire l'expérience / 1 pt pour décrire la v.a.r.)

- 1 pt : $\mathbb{E}(N_k) = \frac{n+1}{2}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(N_k) = \frac{n^2-1}{12}$

4. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n + 1])$.

- **2 pts** : $[X_n = n + 1] = \bigcap_{i=1}^n [N_i = n + 1 - i]$ (ou $[X_n = n + 1] = [N_1 = n] \cap \dots \cap [N_n = 1]$)

- **2 pts** : $\mathbb{P}([X_n = n + 1]) = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ (**1 pt pour indépendance, 1 pt pour $N_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$**)

5. Montrer, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \frac{n-i+1}{n}$.

- **1 pt** : si $[N_1 = i]$ est réalisé, c'est que ...

- **1 pt** : Dans ce cas, $[X_n = 2]$ est réalisé ssi ...

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

- **1 pt** : $([N_1 = i])_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements

- **1 pt** : **FPT** $\mathbb{P}([X_n = 2]) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [X_n = 2])$

- **3 pts** : $\mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{n+1}{2}$

× **1 pt** pour utilisation qst précédente

× **1 pt** pour changement d'indice $j = n - i + 1$

× **1 pt** pour fin calcul

7. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \dots > N_k]$.

En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$.

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

- **2 pts** : **justification** $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \dots > N_k]$ (suivant la rédaction)

- **3 pts** : $\text{Card}([X_n > k]) = \binom{n}{k} n^{n+1-k}$ et $\text{Card}(\Omega) = n^{n+1}$

× **1 pt** : $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments

× **1 pt** : $\binom{n}{k}$ est le nombre de séquence strictement croissante de k éléments

× **1 pt** : $\mathbb{P}([X_n > k]) = \frac{\text{Card}([X_n > k])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k} n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$

- **1 pt** : formule vraie pour $k = 0$

- **1 pt** : formule vraie pour $k = 1$

8. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$, $\mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k - 1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

- **2 pts** : $[X_n > k - 1] = [X_n = k] \cup [X_n > k]$ (dont **1 pt** pr X_n est à valeurs entières)

- **1 pt** : $[X_n = k]$ et $[X_n > k]$ incompatibles

- **1 pt** : $\mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X_n > k - 1]) - \mathbb{P}([X_n > k])$

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n > k])$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

- 1 pt : X_n admet une espérance car finie

- 1 pt : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n = k])$

- 4 pts : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n > k])$

× 1 pt : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k (\mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])) = \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n > k])$

× 1 pt : $= \sum_{k=1}^n (k+1) \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n > k])$
 $= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X_n > k]) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X_n > k])$

× 1 pt : $= 1 \times \mathbb{P}([X_n > 1]) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X_n > k]) - (n+1) \mathbb{P}([X_n > n+1])$

× 1 pt : $= 1 \times \mathbb{P}([X_n > 0]) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X_n > k]) - \cancel{(n+1) \mathbb{P}([X_n > n+1])}$

- 2 pts : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n > k]) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \times \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

10. Montrer : $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

- 1 pt : utilisation qst 8. $\mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])$

- 1 pt : qst 7. $\mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k]) = \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$

- 1 pt : appliquer $k \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k-1}$ en $m = n+1$

- 1 pt : triangle de Pascal $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

- 1 pt : cas $k = n+1$

Partie III : Une convergence en loi /15

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{k-1}{k!}$.

- 1 pt : $(n+1)n(n-1)\dots((n+1)-(k-1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k$

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k-1}{k!}$

- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{k-1}{k!}$

12. Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

- 1 pt : travail sur la somme partielle d'ordre N

- 1 pt :
$$\sum_{k=2}^N \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!}$$

- 1 pt :
$$\dots = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} + 1$$

- 1 pt : reconnaître les sommes partielles d'ordre $N-1$ et N de la série exponentielle de paramètre 1 qui est une série convergente

- 1 pt :
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = e^1 - e^1 + 1$$

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

- 1 pt : Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([Z = k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- 2 pts :
$$\sum_{k=2}^N k \mathbb{P}([Z = k]) = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!}$$

(1 pt pour somme partielle et 1 pt pour décalage d'indice)

- 1 pt :
$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e^1$$

- 1 pt :
$$\mathbb{E}(X_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

- 1 pt :
$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{1}{n} = 1$$

- 1 pt :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = e^1 = \mathbb{E}(Z) \text{ (0 si suspicion de composition d'équivalents)}$$

Exercice 3 /54

Partie 1 /19

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0, 1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

- 1 pt : $\binom{n}{r} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-(r-1))}{r!}$

- 1 pt : pour tout $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$: $n-i \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$

- 1 pt : $n \times (n-1) \times \dots \times (n-(r-1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^r$

- 1 pt : $\binom{n}{r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$

2. a) Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n$.

- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n = 0$ (croissances comparées car $\frac{1}{x} > 1$)

b) En déduire que la série $\sum \binom{n}{r} x^n$ est convergente.

- 4 pts : critère de convergence (1 pt pour positivité, 1 pt pour négligeabilité, 1 pt pour série de Riemann, 1 pt pour citation critère)

3. a) Pour tout entier naturel r , on pose : $S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$. Donner la valeur de S_0 .

- 1 pt : S_r bien définie d'après qst précédente

- 1 pt : $S_0 = \frac{1}{1-x}$

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal : $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.

- 1 pt : $(1-x)S_{r+1} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n+1}{r+1} x^{n+1} - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1}$ (décalage d'indice)

- 1 pt : $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r}$

- 1 pt : $\binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1}$

- 1 pt : $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} = xS_r$

c) En déduire : $\forall x \in]0, 1[$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

d) Donner enfin la valeur de $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

- 1 pt : $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = x^{-r} \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = x^{-r} \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$

Partie 2 /35

On désigne par α et p deux réels de $]0, 1[$.

Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.

Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1 - \alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1 - p$.

Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

- × X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.
- × Y le nombre de manches gagnées par le joueur.
- × G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X , Y et G sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

4. a) Donner la loi de X .

(on pourra noter D_k l'événement « Le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »)

- 1 pt : $X(\Omega) = \mathbb{N}$

- 1 pt : $[X = k] = \overline{D_1} \cap \dots \cap \overline{D_k} \cap D_{k+1}$

- 2 pts : $\mathbb{P}([X = k]) = (1 - \alpha)^k \alpha$ (1 pt pour indépendance des manches, 1 pt pour $\mathbb{P}(D_i) = \alpha$)

b) On pose $T = X + 1$. Démontrer que T suit la loi géométrique de paramètre α .

- 1 pt : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$

- 2 pts : $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$

c) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

- 2 pts : $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\alpha}$ et $\mathbb{V}(T) = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2}$

- 1 pt : $\mathbb{E}(X) = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$ (par linéarité de l'espérance)

- 1 pt : $\mathbb{V}(X) = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2}$

5. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

Déterminer, en distinguant les cas $k \leq n$ et $k > n$ la probabilité $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k])$.

- 1 pt : Si l'événement $[X = n]$ est réalisé c'est que Dans ce cas ...

- 1 pt : description de l'exp comme succession de n épreuves de Bernoulli ...

- 1 pt : conclusion $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

- 1 pt : $\forall k > n, \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = 0$

b) En déduire à l'aide de la **Partie 1** la loi de Y .

-

- 1 pt : la formule de la question précédente est valable dans le cas $n = 0$

- 1 pt : $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements

- 1 pt : **FPT** $\mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = k])$
- 1 pt : $\mathbb{P}([X = n]) \neq 0$
- 1 pt : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1-\alpha)^n \alpha \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (4.a) et 5.a)
- 1 pt : $= \alpha (1-\alpha)^k p^k \frac{1}{(1 - (1-\alpha)(1-p))^{k+1}}$ (d'après 3.d) avec $r = k$ et $x = (1-\alpha)(1-p)$)
- 1 pt : $= \frac{\alpha}{p + \alpha - \alpha p} \left(\frac{(1-\alpha)p}{p + \alpha - \alpha p} \right)^k$
- 1 pt : $\mathbb{P}([Y = k]) = \frac{\alpha}{p + \alpha - \alpha p} \left(1 - \frac{\alpha}{p + \alpha - \alpha p} \right)^k$

6. Calculer l'espérance de Y , puis montrer que $\mathbb{V}(Y) = \frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

- 2 pts : $Z = Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{\alpha}{p + \alpha - \alpha p}\right)$
- 1 pt : $\mathbb{E}(Y) = \frac{p - \alpha p}{\alpha} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} p$
- 1 pt : $\mathbb{V}(Y) = \frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$

7. a) Exprimer G en fonction de X et Y .

- 1 pt : $G = 1 \cdot Y - 1 \cdot (X - Y) = 2Y - X$

b) En déduire l'espérance de G .

- 1 pt : G admet une espérance car est la combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance
- 1 pt : $\mathbb{E}(G) = \frac{1-\alpha}{\alpha} (2p-1)$

8. a) On rappelle que :

- × l'appel `grand(m,N,'geom',p)` permet de simuler m échantillons de N v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre p .
- × l'appel `grand(m,N,'bin',n,p)` permet de simuler m échantillons de N v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi binomiale de paramètre (n,p) .

Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y .

```

1 alpha = input('entrer la valeur de alpha : ')
2 p = input('entrer la valeur de p : ')
3 X = ----
4 Y = ----
5 disp(X)
6 disp(Y)
    
```

- 2 pts : `X = grand(1, 1, 'geom', alpha) - 1`
- 2 pts : `Y = grand(1, 1, 'bin', X, p)`

b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par G ?

- 2 pts (1 pt par ligne)

```

7 G = 2 * Y - X
8 disp(G)
    
```

Exercice 4 /41

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, D(t) = 1 - F(t) = 1 - \mathbb{P}([T \leq t]) = \mathbb{P}([T > t])$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* qui vérifie, pour tout entier naturel n , $D(n) \neq 0$.

1. Coefficient d'avarie.

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n , sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n - 1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbb{P}_{[T > n-1]}([T = n])$$

a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([T = n]) = \mathbb{P}([T > n - 1]) - \mathbb{P}([T > n])$$

En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

- **2 pts** : $[T > n - 1] = [T \geq n] = [T > n] \cup [T = n]$ (**dont 1 pt pour T est à valeurs entières**)

- **1 pt** : $[T = n]$ et $[T > n]$ **sont incompatibles**

- **1 pt** : $\mathbb{P}([T = n]) = D(n-1) - D(n)$

- **1 pt** : $\mathbb{P}_{[T > n-1]}([T = n]) = \frac{\mathbb{P}([T > n - 1] \cap [T = n])}{\mathbb{P}([T > n - 1])}$

- **1 pt** : $[T = n] \subset [T > n - 1]$

b) On suppose que $p \in]0, 1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p .

(i) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?

- **1 pt** : $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p}$

(ii) Calculer, pour tout entier naturel n , $D(n)$ en fonction de n .

- **1 pt** : $[T \leq n] = \bigcup_{i=1}^n [T = i]$

- **1 pt** : $([T = i])_{i \in [1, n]}$ **est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles**

- **1 pt** : $\mathbb{P}([T = i]) = p(1-p)^{i-1}$ **car $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$**

- **1 pt** : $\sum_{i=1}^n p(1-p)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i = \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)}$

(iii) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

- 1 pt : $\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$ d'après 1.a)

- 1 pt : $\dots = \frac{(1-p)^{n-1} - (1-p)^n}{(1-p)^{n-1}}$ d'après 1.b)

c) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n = \alpha$.

(i) Établir, pour tout entier naturel non nul n , l'égalité : $D(n) = (1-\alpha) D(n-1)$.

- 1 pt : $\alpha = \pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$ d'après 1.a)

- 1 pt : $D(n) = (1-\alpha) D(n-1)$ en réorganisant

(ii) En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

- 3 pts : $D(n) = (1-\alpha)^n$ (1 pt pour initialisation, 2 pts pour hérédité)

- 1 pt : $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

- 2 pts : $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$

2. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique.

a) Soit m un entier naturel.

Démontrer par récurrence sur n , pour tout entier naturel n vérifiant $n \geq m$, l'égalité :

$$\sum_{j=m}^n \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) (i) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

- 1 pt : $(T_1 + T_2)(\Omega) \subset \llbracket 2, +\infty \llbracket$

- 1 pt : $([T_1 = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements

- 1 pt : **FPT** $\mathbb{P}([T_1 + T_2 = n]) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_1 = j] \cap [T_1 + T_2 = n])$

- 1 pt : $\sum_{j=1}^{+\infty} = \sum_{j=1}^{n-1}$

- 1 pt : T_1 et T_2 sont indépendantes

- 1 pt : $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $T_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

- 1 pt : $\mathbb{P}([T_1 + T_2 = n]) = (n-1) p^2 (1-p)^{n-2}$

(ii) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k , la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geq k, \mathbb{P}([S_k = n]) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

- 1 pt : initialisation

- 7 pts :

× 1 pt : $([T_{k+1} = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$ SCE et FPT

- × **1 pt** : $[T_{k+1} = j] \cap [S_{k+1} = n] = [T_{k+1} = j] \cap [S_k + j = n]$
- × **1 pt** : $\sum_{j=1}^{+\infty} = \sum_{j=1}^{n-k}$
- × **1 pt** : T_{k+1} et S_k sont indépendantes
- × **1 pt** : $T_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et par hypothèse de récurrence
- × **1 pt** : décalage d'indice $\ell = n - j - 1$
- × **1 pt** pour question 2.a) avec $j \leftarrow \ell$, $m \leftarrow k - 1$ et $n \leftarrow n - 2$)