

DS3 (version B)

Exercice 1

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M , dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E , qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E , l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soient A et B deux matrices de E . Dans toute la suite, on considère l'application $\varphi_{A,B}$ définie comme suit :

$$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} M & \mapsto & AM - MB \\ E & \rightarrow & E \end{array}$$

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E .

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) .
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E . Démontrer :

$$M \in V_{D,\Delta} \quad \Leftrightarrow \quad y = z = t = 0$$

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) (CUBES uniquement - admis pour les autres)

Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a - b$.

En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E , et une matrice D égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de r , telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

b) (CUBES uniquement - admis pour les autres) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E , et d'une matrice Δ égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de s , telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

c) Pour toute matrice M de E , démontrer :

$$M \in V_{A,B} \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$$

En déduire une base de $V_{A,B}$.

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s, r \neq v, u \neq s, u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

- a) Par une méthode analogue à celle de la question 2, déterminer $V_{D,\Delta}$.
- b) (CUBES uniquement - admis pour les autres) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question 3, le sous-espace vectoriel $V_{A,B}$ dans le cas où A et B sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. a) Montrer que φ est une application linéaire.
 b) Calculer $\varphi(X^n)$.
 c) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. On pose, pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
 a) Pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $\varphi(P_k)$.
 b) Montrer que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
 c) (CUBES uniquement - admis pour les autres) Déterminer les sous-espaces propres de φ .

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note alors, pour tout k de \mathbb{N}^* , Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.

Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

3. On note, pour tout k de \mathbb{N}^* , Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $k^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.

On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

- a) Déterminer la loi de Z_2 .
- b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, la valeur de $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$.
 En déduire : $\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_k)$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$, montrer :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}([Z_j = 1])$$

d) En déduire, pour tout k de \mathbb{N}^* : $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

e) Déterminer alors, pour tout k de \mathbb{N} , l'espérance de Y_k .

4. On note, pour tout k de \mathbb{N} , G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i$$

a) Déterminer les polynômes G_0 , G_1 et G_2 .

b) Montrer, pour tout k de \mathbb{N} et tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1])$$

c) Montrer, pour tout k de \mathbb{N} :

$$G_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X)G'_k + XG_k$$

d) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$G_k = \varphi^k(G_0)$$

5. a) Pour tout k de \mathbb{N} , calculer $G_k(1)$ et $G'_k(1)$.

b) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1$$

c) Retrouver alors, pour tout k de \mathbb{N} , l'expression de $\mathbb{E}(Y_k)$ obtenue en question 3.e).

6. On rappelle que les polynômes P_0, \dots, P_n sont définis à la question 2. par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } \llbracket 0, n \rrbracket, P_j = X^j(1-X)^{n-j}$$

a) Calculer $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$.

b) Montrer, pour tout j de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

c) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

d) Montrer finalement, pour tout k de \mathbb{N} et pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

Exercice 3

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.

Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- × si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne,
- × si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.

On désigne par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

- × B_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » ;
- × X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- × u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n , c'est-à-dire $u_n = \mathbb{E}(X_n)$.

1. Étude d'un ensemble de suites

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s x_{n+1} = (s-1)x_n + b + n$$

- a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \alpha n + \beta$.
 Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ appartienne à A .
- b) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite appartenant à A , $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = x_n - v_n$.
 Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n .

2. Expression de la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n

- a) Donner, en fonction de b et de s , les valeurs respectives de $\mathbb{P}(B_1)$ et du nombre u_1 .
- b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbb{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}$.
- c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leq n \leq a$.

Montrer : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}$.

En déduire l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$.

- d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
 Si $k \in \llbracket 0, n-a-1 \rrbracket$, quel est l'événement $[X_n = k]$?
 Si $k \in \llbracket n-a, n \rrbracket$, justifier l'égalité : $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}$.

Montrer enfin que l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. Calcul des nombres u_n et $\mathbb{P}(B_n)$

- a) Soit n un entier naturel non nul. établir, pour tout entier $k \in \llbracket n+1-a, n \rrbracket$ l'égalité :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s} \mathbb{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1, k = n-a$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n-a-1 \rrbracket$.

- b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n .
 En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1.
- c) Donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de u_n et de $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n .
- d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(\mathbb{P}(B_n))_{n \geq 1}$?