

DS4 (version A) / 192

Exercice 1 /56

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 .

1. a) Démontrer : $(A - I_3)^2 (A - 3I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

- 1 pt : $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $(A - I_3)^2 (A - 3I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire les valeurs propres possibles de f .

- 1 pt : $P(X) = (X - 1)^2 (X - 3)$ est un polynôme annulateur de la matrice A

- 1 pt : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{1, 3\}$ (ou racines propres possibles)

- 1 pt : $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

On précisera la dimension des sous-espaces propres.

En particulier, on écrira : $\text{Ker}(f - 3\text{id}) = \text{Vect}(w)$ où w est un vecteur de \mathbb{R}^3 de première coordonnée 1.

- 1 pt : 1 est valeur propre

- 3 pts : détermination de $E_1(f) = \text{Vect}((0, 1, 1))$

- 1 pt : écriture du système

- 1 pt : résolution

- 1 pt : manipulation correcte des objets (pas accordé en cas de confusion entre $E_1(f)$ et $E_1(A)$)

- 2 pts : $\mathcal{F}_1 = ((0, 1, 1))$ est une base de $E_1(f)$ (1 point pour libre, 1 point pour génératrice).

- 1 pt : $\dim(E_1(f)) = 1$

- 2 pts : détermination de $E_3(f) = \text{Vect}((1, 1, 0))$

- 1 pt : écriture du système

- 1 pt : résolution et manipulation correcte des objets (pas accordé en cas de confusion entre $E_3(f)$ et $E_3(A)$)

- 1 pt : $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 0))$ est une base de $E_3(f)$ (« comme précédemment » permet d'obtenir le point si la démo de \mathcal{F}_1 est une base est juste)

- 1 pt : $\dim(E_3(f)) = 1$

- d) L'endomorphisme f est-il bijectif?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

- 1 pt : 0 n'est pas valeur propre donc f est injectif
- 1 pt : mention de la dimension finie pour injectif \Leftrightarrow bijectif
- 1 pt : non diagonalisable car $\dim(E_1(f)) + \dim(E_3(f)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

- a) Démontrer : $\text{Ker}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}((f - \text{id})^2)$.

- 2 pts : on enlève 1 pt en cas de confusion ou de mauvaise introduction d'objets.

- b) Démontrer : $\text{Ker}((f - \text{id})^2) = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

- 3 pts : détermination de $\text{Ker}((f - \text{id})^2) = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 1))$
 - 1 pt : écriture du système
 - 1 pt : résolution
 - 1 pt : manipulation correcte des objets (pas accordé en cas de confusion entre \mathbb{R}^3 et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

3. a) Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

Dans la suite, on notera \mathcal{B}' cette base.

- 2 pts : caractère libre. Dont 1 pt pour la qualité de la rédaction.
- 1 pt : conclusion (libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$)

b) On note $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Déterminer T .

- 1 pt : $f(u) = 1 \cdot u$ car $u \in E_1(f)$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2 pts : $f(v) = -4 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $f(w) = 3 \cdot w$ car $w \in E_3(f)$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

En cas d'erreur de calcul pour $f(v)$ on attribue 1 pt/2 si la méthode est bonne et on attribue aussi le point pour T .

c) On note P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

Déterminer l'inverse de P .

- 1 pt : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 3 pts : $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (2 point calcul / 1 point rédaction)

d) Rappeler la formule liant les matrices A , T et P .

- 1 pt : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ donc $A = P T P^{-1}$

4. a) On note : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N .

- 1 pt : $T = J - 4N$

b) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = J^n - 4n N$.

- 1 pt : $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $JN = N = NJ$ donc J et N commutent

- 1 pt : $T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^{n-k} (-4N)^k$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n \dots = \sum_{k=0}^1 \dots + \sum_{k=2}^n \dots$ car $n \geq 1$

- 1 pt : $\sum_{k=2}^n \dots = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ car : $\forall k \geq 2, N^k = 0$

- 1 pt : $J^{n-1}N = N$

- 1 pt : propriété vraie au rang 0

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n .

- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P T^n P^{-1}$

- 1 pt : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^n \\ 1 & -4n & 3^n \\ 1 & 1-4n & 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^n \\ 1 & -4n & 3^n \\ 1 & 1-4n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 & -3^n+1 \\ 3^n-1-4n & 3^n+1+4n & -3^n-4n+1 \\ -4n & 4n & 2-4n \end{pmatrix}$

5. a) Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

- 1 pt : $(A - I_3)^2 (A - 3I_3) = A^3 - 5A^2 + 7A - 3I_3$

- 1 pt : $A \left(\frac{1}{3} (A^2 - 5A + 7I_2) \right) = I_3$

- 1 pt : A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{3} (A^2 - 5A + 7I_2)$

b) La formule démontrée en 4.c) est-elle valable pour $n = -1$?

- 1 pt : $A^2 - 5A + 7I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{-1}+1 & 3^{-1}-1 & -3^{-1}+1 \\ 3^{-1}-1+4 & 3^{-1}+1-4 & -3^{-1}+4+1 \\ 4 & -4 & 2+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 2 /36

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$. On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q . On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- × soit si l'on a obtenu Pile,
- × soit si l'on a obtenu n fois Face.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus. On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n .

a) Pour tout k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n = k])$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([T_n = 1]) = p$ car $[T_n = 1] = P_1$
- 1 pt : $[T_n = k] = F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$
- 1 pt : lancers indépendants
- 1 pt : $\mathbb{P}([T_n = k]) = q^{k-1}p$

b) Déterminer $\mathbb{P}([T_n = n])$.

- 1 pt : $[T_n = n] = (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap F_n) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n)$
- 1 pt : $[T_n = n] = F_1 \cap \dots \cap F_{n-1}$
- 1 pt : lancers indépendants
- 1 pt : $\mathbb{P}([T_n = n]) = q^{n-1}$

c) Vérifier : $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_n = k]) = 1$.

- 1 pt : $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_n = k]) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([T_n = k]) + \mathbb{P}([T_n = n])$
- 1 pt : $\sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-2} q^k = p \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$ avec $q \neq 1$
- 1 pt : $\mathbb{P}([T_n = n]) = q^{n-1}$ d'après la question précédente

d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier : $\mathbb{E}(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

- 1 pt : T_n admet une espérance car c'est une v.a.r. finie
- 1 pt : $\mathbb{E}(T_n) = p \sum_{k=1}^{n-1} k q^{k-1} + n q^{n-1}$
- 2 pts : $(1 - q) \mathbb{E}(T_n) = (1 - q) \left(p \sum_{k=1}^{n-1} k q^{k-1} + n q^{n-1} \right) = 1 - q^n$

2. Loi de X_n .

a) Donner la loi de X_n .

- 1 pt : $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(r)$ où $r = \mathbb{P}([X_n = 1])$
- 1 pt : $[X_n = 0] = F_1 \cap \dots \cap F_n$
- 1 pt : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = q^n$

b) Vérifier : $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.

- 1 pt : $\mathbb{E}(X_n) = 0 \times \mathbb{P}(\cancel{[X_n = 0]}) + 1 \times \mathbb{P}([X_n = 1]) = 1 - q^n$

3. Loi de Y_n .

a) Déterminer, pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}([Y_n = k])$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_n = 0]) = p$ car $[Y_n = 0] = P_1$

- 1 pt : $[Y_n = k] = F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_n = k]) = q^k p$

b) Déterminer $\mathbb{P}([Y_n = n])$.

- 1 pt : $[Y_n = n] = F_1 \cap \dots \cap F_n$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_n = n]) = q^n$

c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

- 1 pt : $T_n = X_n + Y_n$

- 1 pt : Y_n admet une espérance en tant que différence de v.a.r. admettant une espérance

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{q}{p} (1 - q^n)$ par linéarité de l'espérance

4. (CUBES uniquement - admis pour les autres)

Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

- 1 pt : $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} T \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([T_n = k]) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}([T = k])$

- 1 pt : introduction de $k \in \mathbb{N}^*$ et $n > k$

- 1 pt : $\mathbb{P}([T_n = k]) = q^{k-1} p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} q^{k-1} p$

- 1 pt : reconnaissance d'une loi géométrique de paramètre p

5. Simulation informatique.

On rappelle que l'appel `grand(1,1,'bin',1,p)` renvoie une réalisation d'une v.a.r. suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Compléter les quatre instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , à l'exécution de l'instruction `disp([t, x, y])`.

```

1  p = input('Entrez un reel p :')
2  n = input('Entrez un entier n :')
3  t = 0 ; x = 0 ; y = 0 ;
4  while (x == 0) & (t < n)
5      lancer = grand(1,1,'bin',1,p)
6      if lancer == 0 then
7          y = y + 1
8          t = t + 1
9      else
10         t = t + 1 ; x = 1
11     end
12 end
13 disp([t, x, y])

```

- 4 pts : 1 pt par commande

Exercice 3 /50

- Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E :
 - × on note $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition),
 - × on pose $f^0 = \text{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E .

- On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$f^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$$

- Enfin, on note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$A^k = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad A^{k-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

(avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1 /14

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a + d)A$ en fonction de I_2 .

- 1 pt : $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $A^2 - (a + d)A = -(ad - bc)I_2$

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k .

- a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

- 1 pt : $ad - bc = 0 \Leftrightarrow A$ non inversible

- 2 pts : A non inversible par l'absurde

- b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

- 1 pt : $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

- c) En déduire alors : $a + d = 0$.

- 1 pt : $A^2 - (a + d)A = 0$

- 2 pts : $a + d = 0$

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

- 2 pts : (\Leftarrow) Supposons $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Par hypothèse : $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

On en déduit que A est nilpotente d'indice 2. Ainsi, A est nilpotente.

- 2 pts : (\Rightarrow) si A est nilpotente alors : $ad - bc = 0$ (2.a) et $a + d = 0$ (2.b)).

Or : $A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I_2$ (1.) donc $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension 2.

4. a) Montrer que, si $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- 2 pts (1 pt pour fixer un $x \in E$ et calculer $f^2(x) = f(f(x))$)
- b) On suppose que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Établir alors que $\text{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- 2 pts : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$
 - 1 pt : $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f))$
 - 1 pt : théorème du rang
 - 1 pt : $\dim(\text{Ker}(f)) \neq 2$ par l'absurde
 - 1 pt : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ (inclusion et égalité des dimensions)
- c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- 1 pt : f nilpotent $\Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (**Partie I**)
 - 1 pt : d'après 4.a) $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \Rightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 - 1 pt : d'après 4.b) $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent d'indice 2 et on en étudie quelques propriétés.

5. a) L'endomorphisme f est-il bijectif?
- 2 pts : peu importe la méthode
 - × soit par l'absurde
 - × soit 1 pt pour : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ et $\text{rg}(f) = 1$ d'après 4.b) et 1 pt pour : $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ donc f non injectif donc f non bijectif
- b) Déterminer les valeurs propres possibles de f . En déduire $\text{Sp}(f)$.
- 1 pt : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $P(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de f
 - 1 pt : 0 est l'unique valeur propre possible de f
 - 1 pt : f n'est pas bijectif donc 0 est une valeur propre de f : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.
- c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
- 1 pt : démarrage raisonnement par l'absurde et écriture de la définition de f diagonalisable (ou A diagonalisable avec A une matrice représentative de f)
 - 1 pt : 0 est l'unique valeur propre possible de f donc la matrice D diagonale et semblable à A est nulle
 - 1 pt : f est l'endomorphisme nul. C'est absurde.

6. Montrer qu'il existe une base (e'_1, e'_2) de E telle que : $\text{Mat}_{(e'_1, e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1 pt : il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$
- 2 pts : $\mathcal{B} = (f(u), u)$ libre
- 1 pt : $(f(u), u)$ base de E
- 1 pt : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E , nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

a) Montrer les inclusions : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$.

- 2 pts : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$

- 2 pts : $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$

b) En déduire les égalités : $\text{Im}(f) = \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(f)$.

- 1 pt : f, u et v non nulles

- 1 pt : de plus f, u, v nilpotentes donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(u) = \text{rg}(v) = 1$ d'après 4.b)

- 1 pt : $\text{Im}(f) = \text{Im}(u)$ (inclusion et égalité des dimensions)

- 1 pt : $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Ker}(v))$ puis $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(f)$ (inclusion et égalité des dimensions)

c) En déduire l'égalité : $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$.

- 1 pt : rappeler f nilpotent $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$

- 1 pt : rappeler u (resp. v) nilpotent $\Leftrightarrow u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

- 1 pt : appliquer 4.b) à u (resp. v)

- 1 pt : conclusion

d) Conclure.

- 1 pt : $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui est absurde

Problème /50

Partie 1 : un jeu naïf

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de \mathbb{N}^* , on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.

On note, toujours pour k dans \mathbb{N}^* , E_k l'événement « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».

On note E l'événement « Il y a perpétuellement égalité ».

On note G (resp. H) l'événement « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement « A (resp. B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1 . En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

- 1 pt : lors de la première manche, l'expérience pour le joueur A consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, de même paramètre p

- 1 pt : X_1 est la v.a.r. égale au rang du premier succès (premier pile)

- 1 pt : $X_1 \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y_1 \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$ par un raisonnement analogue

- 3 pts : $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_1 = i]) = 1$ donc il est quasi-certain que le joueur A et le joueur B obtiennent Pile en un temps fini

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1 .

- 1 pt : $E_1 = [X_1 = Y_1]$

c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \mathbb{P}([Y_1 = i])$ et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(E_1)$ en fonction de p et q .

- 1 pt : $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un SCE

- 1 pt : par FPT : $\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [Y_1 = i])$

- 1 pt : par indépendance des lancers : $\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \mathbb{P}([Y_1 = i])$

- 1 pt : $\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} p q^{i-1} \times p q^{i-1} = p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} = p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} = p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} (q^2)^i$

- 1 pt : $\mathbb{P}(E_1) = p^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2}{p(1 + q)} = \frac{p}{1 + q}$

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q .

- 1 pt : G_1 et H_1 sont équiprobables par symétrie des rôles des joueurs A et B

- 1 pt : (E_1, G_1, H_1) est un SCE

- 1 pt : ainsi $1 = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(E_1) + 2\mathbb{P}(G_1)$

- 1 pt : $\mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{2} (1 - \mathbb{P}(E_1)) = \frac{q}{1 + q}$

2. Calcul de la probabilité de l'événement G .

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n \leq Y_n]$.

- 2 pt : $G_n = E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap [X_n < Y_n]$ (1 pt si $[X_n \leq Y_n]$)

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(G_n) = \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{q}{1+q}$$

- 2 pts : $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1) = \frac{p}{1+q}$ (chaque manche suit les mêmes règles)

- 1 pt : $\mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-2}}(E_{n-1}) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n < Y_n])$

- 2 pts : $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n < Y_n]) = \mathbb{P}([X_1 < Y_1]) = \mathbb{P}(G_1) = \frac{q}{1+q}$

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

- 1 pt : d'une part $\left(\frac{p}{1+q} \right)^{1-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q}$

- 1 pt : d'autre part $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{1-1}}([X_1 < Y_1]) = \mathbb{P}(G_1) = \frac{q}{1+q}$

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul : $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{2}$.

- 1 pt : $G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k$

- 1 pt : par incompatibilité, $\mathbb{P}(G) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k)$

- 1 pt : $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q} \right)^{k-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q} \right)^k = \frac{q}{1+q} \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{1+q} \right)}$

- 1 pt : $= \frac{q}{1+q} \frac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}} = \frac{q}{1+q} \frac{1+q}{1-p} = \frac{q}{q-p}$

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $\mathbb{P}(E) = 0$.

- 1 pt : G et H sont équiprobables par symétrie des rôles des joueurs A et B

- 1 pt : (E, G, H) est un SCE

- 1 pt : ainsi $1 = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(E) + 2\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(E) + 1$ donc $\mathbb{P}(E) = 0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. a) À l'aide du système complet d'événements $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$, démontrer : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \frac{pq}{1+q}$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_1 = i + 1] \cap [X_1 = i])$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_1 = i + 1]) \mathbb{P}([X_1 = i])$ par indépendance de X_1 et Y_1

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = q \sum_{i=1}^{+\infty} p^2 q^{2i-2} = q \frac{p}{1+q}$ cf 1.c)

b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

- 1 pt : $D = [Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1]$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \mathbb{P}([X_1 = Y_1 + 1])$ (symétrie des rôles de A et B OK)

- 1 pt : par incompatibilité, $u = \mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) + \mathbb{P}([Y_1 = X_1 - 1]) = \frac{2pq}{1+q}$

4. a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de \mathbb{N}^* .

- 2 pts : $K_n = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap ([Y_n = X_n - 1] \cup [Y_n = X_n + 1])$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(K_n)$.

- 1 pt : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(|Y_n - X_n| = 1)$

- 1 pt : $\mathbb{P}(K_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q} = 2q \left(\frac{p}{1+q}\right)^n$

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

- 1 pt : $K = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j$

- 2 pts : $\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(K_j) = 2p \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_j) = 2p \mathbb{P}(G)$

- 1 pt : $\mathbb{P}(K) = 2p \frac{1}{2} = p$

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'geom', p)` permet à **Scilab** de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

6. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```

1  p = input('entrez une valeur pour p : ')
2  c = 1
3  X = grand(1, 1, 'geom', p)
4  Y = grand(1, 1, 'geom', p)
5  while X == Y
6      X = grand(1, 1, 'geom', p)
7      Y = grand(1, 1, 'geom', p)
8      c = c+1
9  end
10 if X < Y then
11     disp('Le joueur A emporte la partie')
12 else
13     disp('Le joueur B emporte la partie')
14 end
15 disp(c)

```

- 5 pts : 1 pt par commande

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
11 if ----- then disp('A gagne le deuxième jeu') else ----- end
```

- 2 pts

```
16 if abs(X-Y) == 1 then  
17     disp('A gagne le deuxième jeu')  
18 else  
19     disp('B gagne le deuxième jeu')  
20 end
```