

DS4 (version A)

Exercice 1 (vaguement inspiré de EDHEC S 2012)

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 .

1. a) Démontrer : $(A - I_3)^2 (A - 3I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(A - I_3)^2 = (A - I_3) (A - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$(A - I_3)^2 (A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a bien : $(A - I_3)^2 (A - 3I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

□

b) En déduire les valeurs propres possibles de f .

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = (X - 1)^2 (X - 3)$ est un polynôme annulateur de la matrice A .
- Ainsi : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{1, 3\}$.
- Enfin : $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$.

Les réels 1 et 3 sont les valeurs propres possibles de f .

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède **TOUJOURS** un polynôme annulateur non nul P . On peut démontrer (pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré n .
- Si P est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme αP est un polynôme annulateur de A :

$$(\alpha P)(A) = \alpha P(A) = 0$$

Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs. On peut en obtenir d'autres. Par exemple $Q(X) = (X - 5) P(X)$ est un polynôme annulateur de A :

$$Q(A) = (A - 5I) P(A) = 0$$

- Parler DU polynôme annulateur d'une matrice n'a donc aucun sens.

□

c) Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f .

On précisera la dimension des sous-espaces propres.

En particulier, on écrira : $\text{Ker}(f - 3 \text{id}) = \text{Vect}(w)$ où w est un vecteur de \mathbb{R}^3 de première coordonnée 1.

Démonstration.

- Démontrons que 1 est bien valeur propre de A .

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_3 = -C_2$).

On en déduit que 1 est valeur propre de A .

- Démontrons que 3 est bien valeur propre de A .

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_1 = -C_2$).

On en déduit que 3 est valeur propre de A .

Ainsi : $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$ et $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{1, 3\}$.

Commentaire

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A .
- Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !). Par exemple, comme $Q(X) = (X - 5) P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.
- Les racines d'un polynôme annulateur sont généralement appelées valeurs propres **possibles** de A (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). C'est comme cela qu'il faut lire l'inclusion :

$$\text{Sp}(A) \subset \{1, 3\}$$

- Afin de démontrer que 1 et 3 sont bien des valeurs propres de A , on démontre que les matrices $A - I_3$ et $A - 3I_3$ sont non inversibles. Ils'agit de démontrer que ces matrices sont de rang strictement inférieur à 3. Pour ce faire, on peut remarquer (comme on le fait ici) que deux colonnes (resp. lignes) de la matrice considérée sont colinéaires. La présence d'une colonne (resp. ligne) de 0 permet aussi de démontrer le caractère non inversible.

- Déterminons $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id})$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 u \in E_1(f) &\iff (f - \text{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff (A - I) \times U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} 4x = 0 \\ 4y = 4z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_1(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = z\} \\
 &= \{(0, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{z \cdot (0, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((0, 1, 1))
 \end{aligned}$$

On en conclut : $E_1(f) = \text{Vect}((0, 1, 1))$.

- La famille $\mathcal{F}_1 = ((0, 1, 1))$ est :
 - × génératrice de $E_1(f)$,
 - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.
- On en conclut que \mathcal{F}_1 est une base de $E_1(f)$.

Ainsi : $\dim(E_1(f)) = \text{Card}(\mathcal{F}_1) = 1$.

Commentaire

- Comme A est la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B} , alors : $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f)$.
- Par contre : $E_1(A) \neq E_1(f)$. En effet :
 - × $E_3(A)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, espace vectoriel dont les vecteurs sont des matrices de taille 3×1 .
 - × $E_3(f)$ est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 , espace vectoriel dont les vecteurs sont des triplets de réels.
- On peut résumer cette différence par : $(x, y, z) \neq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Déterminons $E_3(f) = \text{Ker}(f - 3 \text{id})$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 3.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 u \in E_3(f) &\iff (f - 3 \text{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff (A - 3I) \times U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x - z = -y \\ -2z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -2x = -2y \\ -2z = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_3(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } z = 0\} \\
 &= \{(y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y \cdot (1, 1, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((1, 1, 0))
 \end{aligned}$$

On en conclut : $E_3(f) = \text{Vect}((1, 1, 0))$.
Ainsi, le vecteur recherché est : $w = (1, 1, 0)$.

- La famille $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 0))$ est :
 - × génératrice de $E_3(f)$,
 - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.
- On en conclut que \mathcal{F}_2 est une base de $E_3(f)$.

Ainsi : $\dim(E_3(f)) = \text{Card}(\mathcal{F}_2) = 1$.

□

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 1$.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que :

$(A - I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut alors remarquer que le choix $x = 0$ et $y = z$ permet d'obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ce n'est qu'une reformulation du fait que les colonnes C_2 et C_3 de la matrice $A - I_3$ sont opposées. On en déduit alors :

$$E_1(A) \supset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

L'égalité peut alors s'obtenir à l'aide d'un argument de dimension. Pour cela, il faut démontrer au préalable que le rang de la matrice $A - I_3$ est de 2. On obtient ainsi, par théorème du rang :

$$\dim(E_1(A)) = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) - \text{rg}(A - I_3) = 3 - 2 = 1$$

- d) L'endomorphisme f est-il bijectif?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Démonstration.

- Comme $0 \notin \text{Sp}(f)$, alors $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et l'endomorphisme f est donc injectif. De plus, \mathbb{R}^3 est un espace vectoriel de **dimension finie**.

On en conclut que f est bijectif.

- L'endomorphisme f possède deux valeurs propres : 1 et 3. De plus :

$$\dim(E_1(f)) + \dim(E_3(f)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ 1 & & 1 \end{array}$$

On en conclut que f n'est pas diagonalisable. □

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\text{Ker}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}((f - \text{id})^2)$.

Démonstration.

Soit $x \in \text{Ker}(f - \text{id})$.

Alors : $(f - \text{id})(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Et par application de $f - \text{id}$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} (f - \text{id})((f - \text{id})(x)) & = & (f - \text{id})(0_{\mathbb{R}^3}) \\ \parallel & & \parallel \\ (f - \text{id})^2(x) & & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array} \quad (\text{car } f - \text{id} \text{ est un endomorphisme})$$

Ainsi : $(f - \text{id})^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc : $x \in \text{Ker}((f - \text{id})^2)$.

On a bien : $\text{Ker}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}((f - \text{id})^2)$.

Commentaire

Cette question n'est qu'une instance particulière de la propriété qui stipule que tout endomorphisme g d'un espace vectoriel E vérifie : $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(g^2)$. □

b) Démontrer : $\text{Ker}((f - \text{id})^2) = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

Démonstration.

• Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}((f - \text{id})^2) & \iff (f - \text{id})^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \iff (A - I)^2 \times U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ & \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ & \iff \{ 2x = -2y + 2z \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{Ker}((f - \text{id})^2) & = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + z\} \\ & = \{(-y + z, y, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = \{y \cdot (-1, 1, 0) + z \cdot (0, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = \text{Vect}((-1, 1, 0), (0, 1, 1)) \end{aligned}$$

On en conclut : $\text{Ker}((f - \text{id})^2) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

- Enfin :

$$\text{Vect}((-1, 1, 0), (1, 0, 1)) = \text{Vect}((-1, 1, 0) + (1, 0, 1), (1, 0, 1)) = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 1))$$

On a bien : $\text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 1))$.

□

3. a) Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

Dans la suite, on notera \mathcal{B}' cette base.

Démonstration.

Rappelons tout d'abord : $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

- Démontrons que la famille (u, v, w) est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

Supposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = (0, 0, 0)$ (*). Or :

$$\begin{aligned}
 (*) & \iff \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = (0, 0, 0) \\
 & \iff \lambda_1 \cdot (0, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 0) = (0, 0, 0) \\
 & \iff \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
 & \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
 & \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 & \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 & \iff \{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \} \\
 & \text{(par remontées successives)}
 \end{aligned}$$

La famille (u, v, w) est libre.

- La famille (u, v, w) :

× est libre.

× vérifie : $\text{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

On en déduit que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u, v, w) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}((u, v, w)) = 3$).
- $\text{Vect}(u, v, w)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u, v, w) . C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u, v, w) d'un ev, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : ~~$\text{Card}(\text{Vect}(u, v, w))$~~ et ~~$\dim((u, v, w))$~~ n'ont aucun sens !

□

b) On note $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Déterminer T .

Démonstration.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(u) = u = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$ car $u \in E_1(f)$.

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- On cherche à décomposer le vecteur $f(v)$ suivant la base (u, v, w) .
Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(v) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$. Or :

$$f(v) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$$

$$\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(v)) = \alpha \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) + \gamma \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w) \quad (\text{par linéarité de } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot))$$

$$\iff AV = \alpha \cdot U + \beta \cdot V + \gamma \cdot W$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{en calculant } AV)$$

$$\iff \begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = -4 \\ \alpha + \beta = -3 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} \alpha + \gamma = -4 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = -3 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} \alpha + \gamma = -4 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \beta - \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \alpha + \gamma = -4 \\ \beta + \gamma = 1 \\ -2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\iff} \begin{cases} \alpha + \gamma = -4 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\iff} \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ainsi : $f(v) = -4 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$.

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(v)) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $f(w) = 3w = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 3 \cdot w$ car $w \in E_3(f)$.

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit : } T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

- c) On note P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .
 Déterminer l'inverse de P .

Démonstration.

- Par définition :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u), \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v), \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w))$$

$$\text{Ainsi : } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftrightarrow L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

- La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P .
(c'est toujours le cas d'une matrice de passage entre deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}')

- On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

d) Rappeler la formule liant les matrices A , T et P .

Démonstration.

La formule de changement de base stipule :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

Ainsi : $A = P T P^{-1}$.

□

4. a) On note : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N .

Démonstration.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J - 4N$$

Ainsi : $T = J - 4N$.

□

b) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = J^n - 4n N$.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par récurrence immédiate : $\forall k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

(il est aussi possible de justifier comme suit :

pour tout $k \geq 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-1} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \times N^{k-1} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$)

• D'autre part :

$$JN = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad NJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $NJ = N = JN$ et les matrices N et J commutent.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned} T^n &= (J - 4N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^{n-k} (-4N)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-4)^k J^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (-4)^k J^{n-k} N^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-4)^k J^{n-k} N^k && \text{(ce découpage est valide car } n \geq 1) \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (-4)^k J^{n-k} N^k && \text{(car : } \forall k \geq 2, N^k = 0) \\ &= \binom{n}{0} (-4)^0 J^n N^0 + \binom{n}{1} (-4)^1 J^{n-1} N^1 = J^n - 4n J^{n-1} N \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = J^n - 4n J^{n-1} N$.

Remarquons alors :

$$J^{n-1} N = \begin{pmatrix} 1^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

- Il reste à vérifier la propriété au rang 0.

× D'une part : $J^0 - 4 \times 0 N = I_3$.

× D'autre part : $T^0 = I_3$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = J^n - 4n N$.

□

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n .

Démonstration.

- D'après la question 3.d) : $A = PTP^{-1}$.

Par une récurrence immédiate, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$T^n = J^n - 4n N = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} - 4n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} A^n &= PT^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^n \\ 1 & -4n & 3^n \\ 1 & 1-4n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 & -3^n + 1 \\ 3^n - 1 - 4n & 3^n + 1 + 4n & -3^n - 4n + 1 \\ -4n & 4n & 2 - 4n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 & -3^n + 1 \\ 3^n - 1 - 4n & 3^n + 1 + 4n & -3^n - 4n + 1 \\ -4n & 4n & 2 - 4n \end{pmatrix}$

□

5. a) Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.

- D'après la question 1.a) : $(A - I_3)^2 (A - 3I_3) = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} (A - I_3)^2 (A - 3I_3) &= (A^2 - 2A + I_3)(A - 3I_3) \\ &= (A^3 - 3A^2) + (-2A^2 + 6A) + (A - 3I_3) \\ &= A^3 - 5A^2 + 7A - 3I_3 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$A^3 - 5A^2 + 7A - 3I_3 = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

donc $A^3 - 5A^2 + 7A = 3I_3$

donc $\frac{1}{3}A(A^2 - 5A + 7I_2) = I_3$

donc $A\left(\frac{1}{3}(A^2 - 5A + 7I_2)\right) = I_3$

On en conclut que la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - 5A + 7I_2)$. □

- b) La formule démontrée en 4.c) est-elle valable pour $n = -1$?

Démonstration.

Déterminons tout d'abord explicitement A^{-1} .

- Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 0 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

- Ainsi :

$$A^2 - 5A + 7I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 0 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

- Par ailleurs, en remplaçant n par -1 dans le membre droit de l'égalité obtenue en 4.c), on obtient la matrice :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{-1} + 1 & 3^{-1} - 1 & -3^{-1} + 1 \\ 3^{-1} - 1 + 4 & 3^{-1} + 1 - 4 & -3^{-1} + 4 + 1 \\ 4 & -4 & 2 + 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 3 & 1 - 3 & -1 + 3 \\ 1 - 3 + 12 & 1 + 3 - 12 & -1 + 12 + 3 \\ 12 & -12 & 18 \end{pmatrix} \quad (\text{en multipliant par } \frac{1}{3} \times 3 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 10 & -8 & 14 \\ 12 & -12 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La formule de la question 4.c) reste valable pour $n = -1$. □

Exercice 2 (EDHEC 2012)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$. On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q . On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- × soit si l'on a obtenu Pile,
- × soit si l'on a obtenu n fois Face.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer »).

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus. On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n .

- a) Pour tout k de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n = k])$.

Démonstration.

Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 1$:

- L'événement $[T_n = 1]$ est réalisé
 - \Leftrightarrow On a effectué exactement 1 lancer
 - \Leftrightarrow On a obtenu Pile lors du premier lancer
 - OU On a obtenu n fois Face lors du premier lancer
 - \Leftrightarrow On a obtenu Pile lors du premier lancer
 - \Leftrightarrow L'événement P_1 est réalisé
- (car il est impossible d'obtenir n fois Face lors du premier lancer puisque $n \geq 2$)*

On en conclut :

$$[T_n = 1] = P_1$$

Finalement : $\mathbb{P}([T_n = 1]) = \mathbb{P}(P_1) = p$.

- Si $k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$:

- L'événement $[T_n = k]$ est réalisé
 - \Leftrightarrow On a effectué exactement k lancers
 - \Leftrightarrow On a obtenu Pile pour la première fois lors du $k^{\text{ème}}$ lancer
 - OU On a obtenu n fois Face lors des k premiers lancers
 - \Leftrightarrow On a obtenu Pile pour la première fois lors du $k^{\text{ème}}$ lancer
 - \Leftrightarrow On a obtenu Face lors du 1^{er} lancer
 - ET On a obtenu Face lors du 2^{ème} lancer
 - \vdots
 - ET On a obtenu Face lors du $(k - 1)^{\text{ème}}$ lancer
 - ET On a obtenu Pile lors du $k^{\text{ème}}$ lancer
 - \Leftrightarrow L'événement $F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$ est réalisé
- (car il est impossible d'obtenir n fois Face en k lancers puisque $k \leq n - 1$)*

On en conclut :

$$[T_n = k] = F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T_n = k]) &= \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= \mathbb{P}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(F_{k-1}) \times \mathbb{P}(P_k) \quad (\text{par indépendance des lancers}) \\ &= q^{k-1} p \end{aligned}$$

$$\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([T_n = k]) = q^{k-1} p$$

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension de l'expérience, on détaille ici l'explication de la décomposition de chaque événement. Cependant la simple donnée de cette décomposition démontre la bonne compréhension de l'expérience et permet d'obtenir la totalité des points alloués à cette question. □

b) Déterminer $\mathbb{P}([T_n = n])$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

- L'événement $[T_n = n]$ est réalisé
 - \Leftrightarrow On a effectué exactement n lancers
 - \Leftrightarrow On a obtenu Pile pour la première fois lors du $n^{\text{ème}}$ lancer
 - OU On a obtenu n fois Face lors des n premiers lancers
 - \Leftrightarrow L'événement $F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n$ est réalisé *(en procédant comme dans la question précédente)*
 - OU L'événement $F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap F_n$ est réalisé

- On en conclut :

$$\begin{aligned} [T_n = n] &= (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap F_n) \\ &= (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1}) \cap (P_n \cup F_n) \\ &= (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1}) \cap \Omega \\ &= F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T_n = n]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(F_i) \quad (\text{par indépendance des lancers}) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} q \\ &= q^{n-1} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}([T_n = n]) = q^{n-1}$$

□

c) Vérifier : $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_n = k]) = 1$.

Démonstration.

D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_n = k]) &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([T_n = k]) \right) + \mathbb{P}([T_n = n]) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} p \right) + q^{n-1} && \text{(car la formule de la question 1.a) est aussi valable pour } k = 1) \\ &= p \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} + q^{n-1} \\ &= p \sum_{k=0}^{n-2} q^k + q^{n-1} \\ &= p \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + q^{n-1} && \text{(car } q \neq 1 \text{ et } p = 1 - q) \end{aligned}$$

Enfinement : $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_n = k]) = 1 - \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^{n-1}} = 1$.

Commentaire

On s'efforcera toujours de donner du crédit à l'énoncé. En particulier, dans cette question, il est évident que l'objectif était de vérifier **par le calcul** : $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_n = k]) = 1$, et non de conclure directement en remarquant que la famille $([T_n = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements. □

d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier : $\mathbb{E}(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. En effet, on effectue au minimum un lancer, au maximum n lancers et il est possible d'effectuer $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ lancers (c'est le cas si et seulement si on obtient Pile pour la première fois lors du $k^{\text{ème}}$ lancer).
La v.a.r. T_n admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
- D'après les questions 1.a) et 1.b) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([T_n = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([T_n = k]) + n \mathbb{P}([T_n = n]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k p q^{k-1} + n q^{n-1} \end{aligned}$$

On obtient : $\mathbb{E}(T_n) = p \sum_{k=1}^{n-1} k q^{k-1} + n q^{n-1}$.

- Montrons maintenant : $p \sum_{k=1}^{n-1} k q^{k-1} + n q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, c'est-à-dire :

$$(1 - q) \left(p \sum_{k=1}^{n-1} k q^{k-1} + n q^{n-1} \right) = 1 - q^n$$

On calcule :

$$\begin{aligned} & (1 - q) \left(p \sum_{k=1}^{n-1} k q^{k-1} + n q^{n-1} \right) \\ &= \left(p \sum_{k=1}^{n-1} k q^{k-1} + n q^{n-1} \right) - \left(p \sum_{k=1}^{n-1} k q q^{k-1} + n q^n \right) \\ &= p \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) q^k - p \sum_{k=1}^{n-1} k q^k + n q^{n-1} (1 - q) && \text{(par décalage d'indice dans la première somme)} \\ &= \left(p + p \sum_{k=1}^{n-2} (k+1) q^k \right) - p \left(\sum_{k=1}^{n-2} k q^k + (n-1) q^{n-1} \right) + n p q^{n-1} && \text{(en isolant un terme de chaque somme et car } p = 1 - q) \\ &= p + p \sum_{k=1}^{n-2} ((\cancel{k} + 1) q^k - \cancel{k} q^k) + (- (\cancel{n} - 1) + \cancel{n}) p q^{n-1} \\ &= p + p \sum_{k=1}^{n-2} q^k + p q^{n-1} \\ &= p + p \frac{q - q^{n-1}}{1 - q} + p q^{n-1} && \text{(car } q \neq 1) \\ &= p + (q - q^{n-1}) + p q^{n-1} \\ &= 1 - (1 - p) q^{n-1} && \text{(car } p + q = 1) \\ &= 1 - q^n && \text{(car } 1 - p = q) \end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $\mathbb{E}(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

□

2. Loi de X_n .

a) Donner la loi de X_n .

Démonstration.

- D'après l'expérience, deux cas seulement peuvent se produire :
 - × soit on s'arrête à l'obtention du 1^{er} Pile (on a donc obtenu 1 Pile).
Dans ce cas, X_n prend la valeur 1.
 - × soit on s'arrête après n Face (on n'a donc jamais obtenu Pile).
Dans ce cas, X_n prend la valeur 0.

On en déduit : $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(r)$ où $r = \mathbb{P}([X_n = 1])$.

- De plus, l'événement $[X_n = 0]$ est réalisé si et seulement si on n'a jamais obtenu Pile au cours des n premiers lancers, c'est-à-dire si on a obtenu Face lors de ces n lancers. Donc :

$$[X_n = 0] = \bigcap_{i=1}^n F_i$$

On en déduit, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(F_i) = \prod_{i=1}^n q = q^n$$

- Comme $([X_n = 0], [X_n = 1])$ est un système complet d'événements, on obtient alors :

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) = 1 - \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - q^n$$

Finalement : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - q^n)$.

□

- b)** Vérifier : $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.

Démonstration.

Par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_n) = 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + 1 \times \mathbb{P}([X_n = 1]) = 1 - q^n$$

On a bien : $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.

□

3. Loi de Y_n .

- a)** Déterminer, pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}([Y_n = k])$.

Démonstration.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 0$:

L'événement $[Y_n = 0]$ est réalisé

⇔ On n'a obtenu aucun Face

⇔ On a obtenu Pile lors du 1^{er} lancer

⇔ L'événement P_1 est réalisé

On en conclut : $[Y_n = 0] = P_1$.

Ainsi : $\mathbb{P}([Y_n = 0]) = \mathbb{P}(P_1) = p$.

- Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

L'événement $[Y_n = k]$ est réalisé

⇔ On a obtenu exactement k Face

⇔ On a obtenu Pile pour la première fois lors du $(k+1)$ ^{ème} lancer

⇔ On a obtenu Face lors du 1^{er} lancer

ET On a obtenu Face lors du 2^{ème} lancer

⋮ ⋮

ET On a obtenu Face lors du k ^{ème} lancer

ET On a obtenu Pile lors du $(k+1)$ ^{ème} lancer

⇔ L'événement $F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$ est réalisé

On en conclut :

$$[Y_n = k] = F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$$

On en déduit, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^k F_i\right) \cap P_{k+1}\right) = \left(\prod_{i=1}^k \mathbb{P}(F_i)\right) \mathbb{P}(P_{k+1}) = q^k p$$

Finalement : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([Y_n = k]) = q^k p$.

□

b) Déterminer $\mathbb{P}([Y_n = n])$.

Démonstration.

L'événement $[Y_n = n]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu n fois Face, c'est-à-dire si on a obtenu Face aux n premiers lancers. Donc :

$$[Y_n = n] = \bigcap_{i=1}^n F_i = [X_n = 0]$$

On en déduit : $\mathbb{P}([Y_n = n]) = q^n$

□

c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

Démonstration.

- Le nombre de lancers est égal à la somme du nombre de Pile et de Face obtenus.

On en déduit : $T_n = X_n + Y_n$.

- Ainsi : $Y_n = T_n - X_n$.

Par conséquent, la v.a.r. Y_n admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}(T_n - X_n) \\ &= \mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(X_n) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1 - q^n}{1 - q} - (1 - q^n) && \text{(d'après 1.d) et 2.b)} \\ &= (1 - q^n) \left(\frac{1}{1 - q} - 1 \right) \\ &= (1 - q^n) \frac{1 - (1 - q)}{1 - q} \\ &= (1 - q^n) \frac{q}{1 - q} \end{aligned}$$

$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{q}{1 - q} (1 - q^n)$

□

4. Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

Démonstration.

- Comme T_n est à valeurs dans \mathbb{N}^* , on a :

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} T \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([T_n = k]) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}([T = k])$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n > k$ (on peut choisir n aussi grand que souhaité car on fera tendre n vers $+\infty$).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T_n = k]) &= q^{k-1} p && \text{(d'après la question 1.a)} \\ & && \text{et car } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} q^{k-1} p \end{aligned}$$

En considérant une v.a.r. T tel que $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a bien démontré :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([T_n = k]) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} q^{k-1} p = \mathbb{P}([T = k])$$

Ainsi, $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} T$ où $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

□

5. Simulation informatique.

On rappelle que l'appel `grand(1,1,'bin',1,p)` renvoie une réalisation d'une v.a.r. suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Compléter les quatre instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , à l'exécution de l'instruction `disp([t, x, y])`.

```

1  p = input('Entrez un reel p :')
2  n = input('Entrez un entier n :')
3  t = 0 ; x = 0 ; y = 0 ;
4  while (x == 0) & (t < n)
5      -----
6      if lancer == 0 then
7          -----
8          -----
9      else
10         -----
11     end
12 end
13 disp([t, x, y])

```

Démonstration.

Dans ce programme, la variable `t` contiendra une réalisation de T_n , la variable `x` une réalisation de X_n et `y` une réalisation de Y_n . Pour cela, on procède comme suit.

- **Début du programme** : initialisation des variables.

Il est d'abord demandé à l'utilisateur de rentrer les valeurs des variables `p` et `n`.

```

1  p = input('Entrez un reel p :')
2  n = input('Entrez un entier n :')

```

Puis, les variables `t`, `x` et `y` sont initialisées à 0. En effet, aucun lancer n'a encore été effectué (en particulier, on n'a encore obtenu aucun Pile et aucun Face).

```

3  t = 0 ; x = 0 ; y = 0 ;

```

- **Structure conditionnelle**

Les lignes 4 à 12 suivantes consistent à déterminer le rang du premier Pile (s'il existe), au cours des n lancers. On doit donc effectuer cette succession de lancers jusqu'à ce qu'on obtienne le premier Pile **ou** qu'on ait effectué n lancers. Autrement dit, on doit effectuer cette succession de lancers tant qu'on n'a pas obtenu Pile (c'est-à-dire tant que le nombre de Pile vaut 0) **et** que le nombre de lancers est inférieur strict à n .

On met donc en place une structure itérative (boucle `while`) :

```

4  while (x == 0) & (t < n)

```

La simulation d'un lancer est fournie par l'instruction donnée dans l'énoncé :

```

5  lancer = grand(1,1,'bin',1,p)

```

À chaque nouveau lancer, deux cas se présentent :

- × soit on a obtenu Face (c'est-à-dire la variable `lancer` contient la valeur 0).
- × soit on a obtenu Pile (c'est-à-dire la variable `lancer` contient la valeur 1)

Cette étape est codée par la structure conditionnelle suivante :

```
6   if lancer == 0 then
```

Alors :

- × si on a obtenu Face.

Dans ce cas, on met à jour la variable `t` pour signaler qu'un nouveau lancer a eu lieu :

```
7       t = t + 1
```

On met également à jour la variable `y` pour signaler qu'on a obtenu un Face de plus :

```
8       y = y + 1
```

- × si on a obtenu Pile.

Dans ce cas, on met toujours à jour la variable `t` pour signaler qu'un nouveau lancer a eu lieu :

```
10      t = t + 1
```

On met également à jour la variable `x` pour signaler qu'on a obtenu un Pile :

```
11      x = 1
```

• **Fin du programme**

On termine en affichant les valeurs des variables `t`, `x` et `y` :

```
13  disp([t, x, y])
```

Commentaire

On rappelle qu'un programme juste mais ne comportant pas le bon nombre de lignes permet tout de même de rapporter la totalité des points alloués à une question **Scilab**.

Cependant, pour respecter la forme du programme donné par l'énoncé on pouvait écrire :

```
10      t = t + 1 ; x = 1
```

Exercice 3 (EDHEC S 2018 - ajout de la question 5.)

- Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E :
 - × on note $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition),
 - × on pose $f^0 = \text{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E .
- On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$f^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$$

- Enfin, on note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$A^k = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad A^{k-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

(avec la convention $A^0 = I_2$).

Commentaire

- Il est important de bien comprendre cette définition pour aborder sereinement cet exercice. Malheureusement, ce paragraphe, s'il présente bien la définition d'**endomorphisme nilpotent d'indice k** , oublie la définition d'**endomorphisme nilpotent** dont on se sert dans la suite.

- Définissons ce terme :

$$\begin{aligned} \text{L'endomorphisme } f \in \mathcal{L}(E) \text{ est nilpotent} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, \text{ l'endomorphisme } f \text{ est nilpotent d'indice } k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \end{aligned}$$

Évidemment, on est dans le cadre d'une propriété **existentielle** (\exists) et non **universelle** (\forall).

On notera par exemple que la propriété ne peut être vérifiée à la fois au rang 1 (exige $f^1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$) et au rang 2 (exige $f^1 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$).

- En fait, l'indice de nilpotence (d'un endomorphisme nilpotent) est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On peut d'ailleurs noter que non seulement $f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ mais que ceci est aussi vérifié aux rangs précédents : $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, f^i \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2 .

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a^2 + bc) - (a^2 + ad) & (ab + bd) - (ab + bd) \\ (ac + cd) - (ac + cd) & (bc + d^2) - (ad + d^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad) I_2 = -(ad - bc) I_2 \end{aligned}$$

$$A^2 - (a+d)A = -(ad - bc) I_2$$

Commentaire

- L'égalité établie dans cette question provient d'un paragraphe qui n'est pas dans le programme mathématique en classes préparatoires commerciales.

Pour la culture, donnons plus de détails sur ce point.

- Considérons la matrice : $A - X I_2 = \begin{pmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{pmatrix}$.

Cette matrice est une matrice de polynôme, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}[X])$.

Notons alors :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - X I_2) \\ &= (a - X)(d - X) - bc = X^2 - (a + d)X + (ad - bc) \end{aligned}$$

Le polynôme χ_A est nommé **polynôme caractéristique** de la matrice A .

La question précédente démontre que χ_A est un polynôme annulateur de la matrice A .

Cela permet de déduire les **valeurs propres possibles** de la matrice A . Il y a même mieux : $\text{Sp}(A) = \{\text{racines de } \chi_A\}$ (cela dépasse très largement le programme). □

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k .

a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

Démonstration.

D'après la question précédente : $-(ad - bc) I_2 = A^2 - (a + d) A$.

On en déduit, par multiplication à gauche et à droite par A^{k-1} :

$$\begin{aligned} -(ad - bc) A^{k-1} &= A^k - (a + d) A^{k+1} \\ &= 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(car } A^k = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ \text{et donc } A^{k+1} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) \end{array}$$

La matrice A étant nilpotente d'indice k , on a : $A^{k-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Comme $(ad - bc) A^{k-1} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $A^{k-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, on a : $ad - bc = 0$.

Commentaire

- On pouvait procéder autrement en remarquant :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

L'objectif de cette question est donc de démontrer qu'une matrice nilpotente est non inversible.

- On peut alors procéder par l'absurde.

Supposons que A est inversible.

Alors, en multipliant par A^{-1} de part et d'autre de l'égalité $A^k = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$:

$$\begin{array}{ccc} A^{-1} \times A^k & = & A^{-1} \times 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ \parallel & & \parallel \\ A^{k-1} & & 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \end{array}$$

Ce qui contredit la définition de nilpotence. □

b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

Démonstration.

On suppose dans l'énoncé que la matrice A est non nulle.
Ainsi, A n'est pas nilpotente d'indice 1.

Comme l'indice de nilpotence est un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que k est forcément supérieur ou égal à 2. □

c) En déduire alors : $a + d = 0$.

Démonstration.

- D'après la question 1. : $A^2 - (a + d)A = -(ad - bc)I_2$.
On déduit alors de la question 2.a) :

$$A^2 = (a + d)A$$

- Comme $k \geq 2$, alors $k - 2 \geq 0$.
On déduit, par multiplication à gauche et à droite par A^{k-2} :

$$\begin{aligned} A^k &= (a + d)A^{k-1} \\ \parallel \\ 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} & \qquad \qquad \qquad (\text{car } A \text{ est nilpotente} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{d'indice } k) \end{aligned}$$

La matrice A étant nilpotente d'indice k , on a : $A^{k-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Comme $(a + d)A^{k-1} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $A^{k-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, on a : $a + d = 0$. □

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Démonstration.

(\Leftarrow) Supposons $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Par hypothèse : $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

On en déduit que A est nilpotente d'indice 2. Ainsi, A est nilpotente.

(\Rightarrow) Supposons que la matrice A est nilpotente. Alors :

- × d'après la question 2.a) : $ad - bc = 0$.
- × d'après la question 2.b) : $a + d = 0$.
- × d'après la question 1. : $A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I_2$.

On en déduit : $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Commentaire

- Il faut bien comprendre que cette propriété est vérifiée car A est une matrice carrée d'ordre 2. Il faut donc lire :

$$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ nilpotente} \Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$
- Cette propriété se généralise. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ nilpotente} \Leftrightarrow A^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

□

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension 2.

4. a) Montrer que, si $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Démonstration.

Supposons $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

Il s'agit de démontrer : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E, f^2(x) = 0_E$.

Soit $x \in E$. Alors :

$$f^2(x) = f(f(x)) = 0_E$$

En effet : $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

En supposant : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, on obtient bien : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Commentaire

- Cette partie est plus théorique que la précédente. L'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est simplement de vérifier que les définitions de base (comme le noyau et l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient alors directement le résultat.
- Plus précisément, une telle question commence par la mise en place d'une structure de démonstration. Il faut savoir démontrer :
 - × une propriété quantifiée universellement : $\forall x \in E, p(x)$
Soit $x \in E \dots$
 - × une propriété quantifiée existentiellement : $\exists x \in E, p(x)$
(il s'agit alors d'exhiber un élément $x \in E$ qui vérifie la propriété p)
 - × une inclusion d'ensemble : $A \subset B$
Soit $x \in A \dots$ alors $x \in B$
 - × une égalité d'ensemble : $A = B$
(on procède par double inclusion à l'aide de la structure de démonstration précédente)
 - × une implication : $p \Rightarrow q$
Supposons p et démontrons q .
 - × une équivalence : $p \Leftrightarrow q$
(on procède par double implication à l'aide de la structure de démonstration précédente)Ce n'est qu'une fois la structure de démonstration en place que l'on déroule les définitions.
- On peut en profiter pour remarquer que l'étape d'hérédité d'une récurrence n'est qu'une illustration de ces structures de démonstration. Il s'agit de démontrer la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

En terme de rédaction, il n'y a donc guère le choix :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

□

- b) On suppose : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
 Établir alors : $\text{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

Démonstration.

- Soit $y \in \text{Im}(f)$.
 Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.

Alors :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(f(x)) \\ &= f^2(x) = 0_E \quad (\text{car } f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}) \end{aligned}$$

Ainsi, $y \in \text{Ker}(f)$.

On en conclut : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

$\underline{1}$ Soit $y \in \text{Im}(f)$.
 $\underline{2}$ Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Alors :
 $\underline{3}$ $f(y) = \dots$
 $\underline{4}$ $\quad = \dots$
 $\underline{5}$ $\quad = 0_E$
 $\underline{6}$ Ainsi, $y \in \text{Ker}(f)$.

- × Les lignes $\underline{1}$ et $\underline{6}$ correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\text{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\text{Ker}(f)$.
- × La ligne $\underline{2}$ correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application. Dire : $y \in \text{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.
- × La ligne $\underline{3}$ correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $y \in \text{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne $\underline{3}$ ainsi que le résultat en ligne $\underline{5}$.

C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

- Le message est clair : sur les 6 lignes de présentation, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

- D'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

||

2

Or, comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, on en déduit :

$$\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f))$$

Deux cas se présentent alors :

× soit $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

× soit $\dim(\text{Im}(f)) = 0$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

Dans ce cas : $\text{Im}(f) = \{0_E\}$ et donc $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui est exclu par l'énoncé.

On en conclut : $\text{rg}(f) = 1$.

Commentaire

On peut préférer raisonner sur le noyau de f .

Comme $\text{Ker}(f) \subset E$, si on sait de plus $\dim(\text{Ker}(f)) = 2 = \dim(E)$ alors :

$$\text{Ker}(f) = E$$

Ainsi : $\forall u \in E, f(u) = 0_E$ et donc : $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

• On a démontré :

× $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$,

× $\dim(\text{Im}(f)) = 1 = \dim(\text{Ker}(f))$.

On en déduit : $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

□

c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

Démonstration.

• D'après la question **4.b**) : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

• D'après la question **4.a**) : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

On en déduit : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

• Considérons \mathcal{B} une base de E . Notons alors : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

f est nilpotent $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, A^{k-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $A^k = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

$\Leftrightarrow A$ est nilpotente

$\Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

$\Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

(par application de
l'isomorphisme de
représentation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$)

(d'après la **Partie 1**)

(par application de
la réciproque de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$)

Ainsi : f est nilpotent $\Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

Commentaire

Il est aussi possible d'évoquer la « passerelle endomorphisme-matrice » en lieu et place de l'isomorphisme de représentation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$. Quelle que soit la présentation, on retiendra :

$$f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{L}(E)}) \Leftrightarrow (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \quad \square$$

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent d'indice 2 et on en étudie quelques propriétés.

5. a) L'endomorphisme f est-il bijectif?

Démonstration.

On procède par l'absurde.

Supposons que f est bijectif.

Comme f est nilpotent d'indice 2 :

$$\begin{aligned} f^2 &= 0_{\mathcal{L}(E)} \\ \text{donc } f^{-1} \circ f^2 &= f^{-1} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} \\ \text{d'où } f &= 0_{\mathcal{L}(E)} \end{aligned}$$

Absurde! (d'après l'énoncé de la Partie 2).

On en déduit que f n'est pas bijectif.

□

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f . En déduire $\text{Sp}(f)$.

Démonstration.

- Comme f est nilpotent d'indice 2 : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On en déduit que le polynôme $Q(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de f . Ainsi :

$$\text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$$

La seule valeur propre possible de f est 0.

- D'après la question précédente, l'endomorphisme f n'est pas bijectif. On en déduit que 0 est effectivement valeur propre de f .

Finalement : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

□

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Démonstration.

D'après l'énoncé, E est un espace vectoriel de dimension 2. On note \mathcal{B} l'une de ses bases.

On procède par l'absurde.

Supposons que f est diagonalisable.

Alors il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ constituée de vecteurs propres de f .

Comme $\text{Sp}(f) = \{0\}$ alors $f(u_1) = 0_E = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$ et $f(u_2) = 0_E = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$. Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

$$\text{donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{L}(E)})$$

L'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ étant bijective, on en déduit : $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Absurde!

Ainsi, f n'est pas diagonalisable.

Commentaire

- Il était possible de rédiger différemment en prenant le parti de diagonaliser la matrice représentative de f dans une base \mathcal{B} quelconque. Détaillons cette rédaction.
- On commence par noter $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice représentative de f dans une base \mathcal{B} de E . On procède par l'absurde. Supposons que f est diagonalisable. Alors A est diagonalisable. Il existe alors :
 - × $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible,
 - × $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A , telles que : $A = PDP^{-1}$. Or $\text{Sp}(f) = \{0\}$. Donc :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

On en déduit : $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Absurde !

- Cette question est un grand classique des sujets. Il faut donc savoir la traiter correctement, en adoptant l'un ou l'autre des rédactions ci-dessus. \square

6. Montrer qu'il existe une base (e'_1, e'_2) de E telle que : $\text{Mat}_{(e'_1, e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

On procède par **analyse-synthèse**.

Analyse.

Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ de E dans laquelle la matrice représentant f est :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela signifie que e'_1 et e'_2 sont deux vecteurs non nuls (sinon \mathcal{B}' ne serait pas une base) tels que :

× $f(e'_1) = 0_E$. Autrement dit : $e'_1 \in \text{Ker}(f)$.

× $f(e'_2) = e'_1$. Autrement dit : $e'_1 \in \text{Im}(f)$.

Notons au passage que la seconde proposition assure la première.

En effet, comme f est nilpotent alors, d'après la question 4.c), $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Ainsi :

$$e'_1 \in \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$$

Synthèse.

- Comme $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\text{Im}(f) \neq \{0_E\}$.

On en déduit qu'il existe $e'_1 \neq 0_E$ tel que $e'_1 \in \text{Im}(f)$.

Par définition de $\text{Im}(f)$, il existe alors $e'_2 \in E$ tel que : $e'_1 = f(e'_2)$.

Notons que : $e'_2 \neq 0_E$ (on aurait sinon $e'_1 = 0_E$).

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = (e'_1, e'_2)$ est une base de E .

On commence par démontrer que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Supposons : $\lambda_1 \cdot e'_1 + \lambda_2 \cdot e'_2 = 0_E$ (*). Par définition de e'_1 , on obtient :

$$\lambda_1 \cdot f(e'_2) + \lambda_2 \cdot e'_2 = 0_E$$

En appliquant f de part et d'autre, on obtient par linéarité de f :

$$\lambda_1 \cdot f(f(e'_2)) + \lambda_2 \cdot f(e'_2) = f(0_E)$$

Or :

× $f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire.

× $f(f(e'_2)) = f^2(e'_2) = 0_E$.

En effet, comme f est nilpotent, on déduit de la question 4.c) que : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

× $f(e'_2) = e'_1$.

L'égalité précédente se réécrit alors :

$$\lambda_2 \cdot e'_1 = 0_E$$

et comme $e'_1 \neq 0_E$, alors $\lambda_2 = 0$.

En reportant ce résultat dans l'égalité (*), on obtient :

$$\lambda_1 \cdot e'_1 = 0_E$$

et comme $e'_1 \neq 0_E$, alors $\lambda_1 = 0$.

On en déduit que la famille \mathcal{F} est libre.

De plus : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(E)$.

Ainsi, la famille \mathcal{F} est une base de E .

- Notons alors \mathcal{B}' cette base.

On a alors : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Commentaire

- Cet exercice est un classique des oraux HEC.
Il s'agit donc d'une question difficile qu'il convient d'avoir déjà traitée avant.
- Il faut noter que le raisonnement par analyse-synthèse n'est mentionné que dans le programme ECS. Dans un sujet ECE, il ne peut être demandé de faire seul un tel raisonnement. L'énoncé peut par contre détailler ce type de raisonnement.
C'était le cas dans la **Partie 2** du sujet ESSEC-I 2018 :

× la question 6. était nommée **Analyse**.

× la question 7. était nommée **Synthèse**.

Détaillons maintenant les attentes d'un tel raisonnement.

- Dans la première partie du raisonnement, on suppose qu'il existe une base \mathcal{B}' dans laquelle la représentation matricielle de f est de la forme souhaitée. En se basant sur cette hypothèse, on obtient une caractérisation de la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, qui consiste essentiellement à exiger :

$$e'_1 \neq 0_E \quad \text{et} \quad e'_1 \in \text{Im}(f) \quad \text{et} \quad e'_2 \text{ est un antécédent de } e'_1 \text{ par } f$$

Il faut bien comprendre que dans cette première partie du raisonnement, on a **supposé** (et non démontré !) l'existence d'une telle base \mathcal{B}' . C'est pourquoi il faut, dans la deuxième partie du raisonnement, démontrer l'existence d'une telle base \mathcal{B}' .

L'idée est alors de construire la famille (e'_1, e'_2) telle que caractérisée dans la partie **analyse** et de **démontrer** que l'on obtient ainsi une base qui satisfait les exigences de la question.

Commentaire

- En résumé, un raisonnement par **analyse-synthèse** se déroule en deux temps :
 - × **analyse** : on suppose l'existence d'un objet vérifiant certains critères (ici, on suppose l'existence de la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$). Si cet objet existe, il est alors d'une certaine forme ($e'_1 \neq 0_E$, et $e'_1 = f(e'_2) \in \text{Im}(f)$).
 - × **synthèse** : on vérifie que l'objet obtenu lors de la phase d'analyse répond bien aux critères initiaux (\mathcal{B}' ainsi construite est bien une base et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ a la forme souhaitée). Cela permet de lever la réserve d'existence.

Ce schéma de démonstration permet non seulement de conclure :

$$\begin{array}{ccc} \text{l'objet répond à} & & \text{l'objet s'écrit sous une} \\ \text{certains critères} & \Leftrightarrow & \text{forme particulière} \end{array}$$

mais aussi de démontrer que chacune des deux propositions de l'équivalence est vérifiée. □

7. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E , nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

a) Montrer les inclusions : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$.

Commentaire

Cette question est une illustration simple des structures de démonstration.

Démonstration.

- Soit $y \in \text{Im}(f)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= (u \circ v)(x) && \text{(par définition de } f) \\ &= u(v(x)) \end{aligned}$$

On en déduit : $y \in \text{Im}(u)$.

$$\boxed{\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)}$$

- Soit $x \in \text{Ker}(v)$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= (u \circ v)(x) && \text{(par définition de } f) \\ &= u(v(x)) \\ &= u(0_E) && \text{(car } x \in \text{Ker}(v)) \\ &= 0_E && \text{(car } u \text{ est linéaire)} \end{aligned}$$

On en déduit : $x \in \text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)}$$

□

b) En déduire les égalités : $\text{Im}(f) = \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord : $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ sinon on aurait : $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- D'après la question 4.c) :

$$u \text{ est nilpotent} \Leftrightarrow u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$$

Ainsi, comme u est supposé nilpotent, $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et, d'après la question 4.b), on obtient :

$$\text{rg}(u) = 1$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{rcc} \dim(E) & = & \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) \\ \parallel & & \parallel \\ 2 & & 1 \end{array}$$

et ainsi : $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$

- Les points précédents restent vérifiés pour tout endomorphisme nilpotent non nul de E .

On en déduit : $\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\text{Im}(v)) = \dim(\text{Im}(f)) = 1$
 et : $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Ker}(v)) = \dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

- D'après la question précédente : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$.

Or, comme $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(u))$, alors : $\text{Im}(f) = \text{Im}(u)$.

D'après la question précédente : $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$.

Or, comme $\dim(\text{Ker}(v)) = \dim(\text{Ker}(f))$, alors : $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(f)$.

□

c) En déduire l'égalité : $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$.

Démonstration.

- Comme u est un endomorphisme nilpotent non nul de E alors, d'après la question 4. :

$$\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$$

Par le même argument : $\text{Ker}(v) = \text{Im}(v)$ et $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(u) &= \text{Im}(u) \\ &= \text{Im}(f) && \text{(d'après la question 6.b)} \\ &= \text{Ker}(f) \\ &= \text{Ker}(v) && \text{(d'après la question 6.b)} \\ &= \text{Im}(v) \end{aligned}$$

On a bien : $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$.

□

d) Conclure.

Démonstration.

- Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= (u \circ v)(x) \\ &= u(v(x)) \\ &= 0_E \quad (\text{car } v(x) \in \text{Im}(v) = \text{Ker}(u)) \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in E, f(x) = 0_E$.

- Dans l'énoncé, on a supposé l'existence de f nilpotent non nul s'écrivant sous la forme $f = u \circ v$ avec u et v nilpotent.

Le point précédent contredit cette hypothèse.

On en conclut qu'il n'existe pas de tel endomorphisme f .

□

Problème (EDHEC 2021)

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p , élément de $]0, 1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de \mathbb{N}^* , on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.

On note, toujours pour k dans \mathbb{N}^* , E_k l'événement « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».

On note E l'événement « Il y a perpétuellement égalité ».

On note G (resp. H) l'événement « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement « A (resp. B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. Étude de la première manche.

- a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1 . En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

Démonstration.

- Lors de la première manche, l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. X (respectivement Y) prend pour valeur le rang du premier Pile obtenu.

On en déduit : $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$ (respectivement $Y \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$).

- Dans la suite, notons : C : « la première manche dure éternellement ».
Il s'agit de démontrer : $\mathbb{P}(C) = 0$. Or : $\mathbb{P}(C) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{C}) = 1$. Or :

L'événement \overline{C} est réalisé

\Leftrightarrow La première manche termine se en un temps fini

\Leftrightarrow A obtient Pile en un nombre fini de lancers lors de la 1^{ère} manche

OU B obtient Pile en un nombre fini de lancers lors de la 1^{ère} manche

\Leftrightarrow Il existe un rang $i \in \mathbb{N}^*$ de première apparition de Pile pour le joueur A lors de la 1^{ère} manche

OU Il existe un rang $j \in \mathbb{N}^*$ de première apparition de Pile pour le joueur B lors de la 1^{ère} manche

\Leftrightarrow Il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $[X_1 = i]$ est réalisé

OU Il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $[Y_1 = j]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} [X_1 = i]$ est réalisé

OU L'événement $\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} [Y_1 = j]$ est réalisé

On en conclut :

$$\bar{C} = \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} [X_1 = i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} [Y_1 = j] \right)$$

• En particulier :

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} [X_1 = i] \subset \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} [X_1 = i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} [Y_1 = j] \right)$$

$$\text{donc } \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} [X_1 = i] \right) \leq \mathbb{P} \left(\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} [X_1 = i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} [Y_1 = j] \right) \right) = \mathbb{P}(\bar{C}) \quad (\text{par croissance de l'application } \mathbb{P})$$

||

1

(car la famille $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements)

Comme $\mathbb{P}(\bar{C}) \geq 1$ alors $\mathbb{P}(\bar{C}) = 1$ et ainsi $\mathbb{P}(C) = 0$.

Commentaire

- Dans le cours, il est précisé qu'une v.a.r. X qui suit une loi géométrique (de paramètre p) admet pour ensemble image \mathbb{N}^* . En réalité, il y a ici confusion entre ensemble image et support. Certains énoncés présentent d'ailleurs la précision suivante : « la v.a.r. N prend pour valeur le rang d'apparition, **s'il existe**, du premier Pile et prend la valeur 0 sinon ». Dans ce cas, $N(\Omega) = \mathbb{N}$ mais, le support de N , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par N avec probabilité non nulle, est $\text{Supp}(N) = \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X_1 = x]) = \mathbb{P}([N = x]) \quad (\text{et ces probabilités sont nulles si } x \notin \mathbb{N}^*)$$

On considère alors que les v.a.r. discrètes X_1 et N sont toutes deux de même loi $\mathcal{G}(p)$.

- Formellement, $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas un système complet d'événements car :

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} [X_1 = i] = \Omega \setminus \{\omega_0\}$$

où $\omega_0 = (\text{Face}, \text{Face}, \text{Face}, \dots)$ (l' ∞ -tirage où on obtient que des Face). En réalité, $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est seulement un système quasi-complet d'événements. Les événements qui le constituent sont 2 à 2 incompatibles et de plus :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} [X_1 = i] \right) = 1$$

Ce point explique la rédaction de la question.

- La propriété exposée dans le premier point se généralise comme suit. Soient X et Y deux v.a.r. **discrètes**. Alors :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([Y = x])$$

On insiste sur le fait que la propriété ci-dessus n'est vérifiée que pour les v.a.r. discrètes (rappelons que si X est une v.a.r. à densité alors, pour tout $x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}([X = x]) = 0$). En réalité, le bon outil pour définir une loi est plus le support que l'ensemble image :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \Leftrightarrow \forall x \in \text{Supp}(X), \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([Y = x])$$

Si on insiste autant sur l'ensemble image c'est parce que l'on comprend mieux les v.a.r. discrètes lorsqu'on sait quelles valeurs elles peuvent prendre.

Commentaire

- Il était aussi possible de rédiger autrement. Pour ce faire, on introduit, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$P_i^A : \text{« le joueur } A \text{ a obtenu Pile lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

$$P_i^B : \text{« le joueur } B \text{ a obtenu Pile lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

On introduit de manière similaire les événements F_i^A et F_i^B . On a alors :

$$C = \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^B \right) \subset \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &\leq \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A \right) && \text{(par croissance} \\ &&& \text{de l'application } \mathbb{P}) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^m F_i^A \right) && \text{(d'après le théorème de} \\ &&& \text{la limite monotone)} \end{aligned}$$

Et, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^m F_i^A \right) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(F_i^A) = \prod_{i=1}^m p = p^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

Finalement :

$$0 \leq \mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A \right) = 0$$

□

- b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1 .

Démonstration.

L'événement E_1 est réalisé

- ⇔ Il y a égalité à la fin de la 1^{ère} manche
- ⇔ Les deux joueurs ont obtenu leur premier Pile lors du même lancer
- ⇔ Les v.a.r. X_1 et Y_1 prennent la même valeur
- ⇔ L'événement $[X_1 = Y_1]$ est réalisé

$$E_1 = [X_1 = Y_1]$$

Commentaire

- Donner le résultat permet de démontrer la compréhension et ainsi d'obtenir tous les points alloués à la question. La précédente rédaction est mise en avant pour permettre la bonne compréhension des mécanismes en jeu.
- On pouvait aussi remarquer :

- L'événement E_1 est réalisé ⇔ Les v.a.r. X_1 et Y_1 prennent la même valeur
- ⇔ Il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $[X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$ est réalisé
- ⇔ $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$ est réalisé

Cela permet de conclure : $E_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$.

□

c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \mathbb{P}([Y_1 = i])$ et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(E_1)$ en fonction de p et q .

Démonstration.

La famille $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.

On en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 = Y_1]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_1 = Y_1]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [i = Y_1]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}([Y_1 = i]) \quad (\text{par indépendance des lancers}) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}([Y_1 = i])$$

Commentaire

- Si la question précédente peut paraître difficile de premier abord, la lecture de cette question éclaire quant au résultat que nous étions censés trouver en question précédente. On peut en effet, au brouillon, opérer par rétro-ingénierie pour trouver le résultat à démontrer en question précédente. Il est ici demandé de démontrer :

$$\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \mathbb{P}([Y_1 = i])$$

Or, par indépendance :

$$\mathbb{P}([X_1 = i]) \mathbb{P}([Y_1 = i]) = \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [Y_1 = i])$$

Finalement, on doit démontrer :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [Y_1 = i]) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]\right) \quad (\text{la somme de probabilités doit faire penser à la probabilité d'une réunion !}) \end{aligned}$$

Démontrer : $E_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$ permet de démontrer l'égalité au-dessus. Cette question fournit donc, à quelques manipulations près, la réponse à la question précédente.

- Évidemment, il ne s'agit pas de rédiger la question **1.c)** en indiquant : « d'après la question suivante ... ». En revanche, on ne peut reprocher à un candidat d'exploiter au maximum les informations fournies par le sujet. Il est donc conseillé de bien lire le sujet afin de vérifier si l'énoncé d'une question ne fournit pas la réponse à une question précédente.

- On a alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(E_1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \mathbb{P}([Y_1 = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} p q^{i-1} \times p q^{i-1} && (\text{car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ et } Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \\
 &= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} \\
 &= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} \\
 &= p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} (q^2)^i \\
 &= p^2 \frac{1}{1 - q^2} && (\text{d'après la formule de la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in]0, 1[)
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{p^2}{1 - q^2}$$

- Enfin, on remarque :

$$\begin{aligned}
 1 - q^2 &= 1 - (1 - p)^2 \\
 &= 1 - (1 - 2p + p^2) \\
 &= \cancel{1} - \cancel{1} + 2p - p^2 \\
 &= p(2 - p) \\
 &= p(1 + (1 - p)) = p(1 + q)
 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } \mathbb{P}(E_1) = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{p}(1 + q)} = \frac{p}{1 + q}.$$

□

- d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q .

Démonstration.

- Les joueurs A et B jouent avec deux pièces identiques. De plus, le jeu auquel il participe est le même pour chaque joueur notamment car les lancers de pièces sont effectués de manière simultanée. Les rôles des joueurs A et B sont donc parfaitement symétriques (on pourrait échanger les noms de ces joueurs sans que cela ne modifie le problème). Ainsi, les joueurs A et B ont même probabilité de gagner la 1^{ère} manche.

On en déduit que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables.

- À la fin de la 1^{ère} manche, seules trois situations sont possibles :
 - × le joueur A gagne la 1^{ère} manche. Autrement dit, l'événement G_1 est réalisé.
 - × le joueur B gagne la 1^{ère} manche. Autrement dit, l'événement H_1 est réalisé.
 - × il y a égalité lors de la 1^{ère} manche. Autrement dit, l'événement E_1 est réalisé.
 Ces trois événements sont de plus 2 à 2 incompatibles car il n'y a qu'un gagnant en fin de 1^{ère} manche et s'il y a égalité c'est qu'il n'y a pas de gagnant.

On en conclut que la famille (E_1, G_1, H_1) est un système complet d'événements.

- En particulier, on a donc :

$$\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(H_1) = 1$$

donc $\mathbb{P}(E_1) + 2\mathbb{P}(G_1) = 1$ (car $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(H_1)$)

ainsi
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_1) &= \frac{1}{2} (1 - \mathbb{P}(E_1)) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{1+q} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(1+q) - p}{1+q} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(1-p) + q}{1+q} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2q}{1+q} \right) \end{aligned}$$

On en conclut, à l'aide de la question précédente : $\mathbb{P}(G_1) = \frac{q}{1+q}$.

Commentaire

- La manière de procéder dans cette question est particulièrement intéressante car elle permet d'obtenir le résultat sans avoir à effectuer de calculs.
- Il est aussi possible de démontrer ce résultat de manière plus calculatoire. On remarque tout d'abord :

$$G_1 = [X_1 < Y_1]$$

Comme $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 < Y_1]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_1 < Y_1]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [k < Y_1]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}([k < Y_1]) && \text{(car } X_1 \text{ et } Y_1 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \times (1-p)^k && \text{(} \mathbb{P}([Y_1 > k]) = (1-p)^k \text{ car } Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{)} \\ &= p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-2} \\ &= pq \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k-1} \\ &= pq \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k && \text{(par décalage d'indice)} \\ &= pq \frac{1}{1-q^2} \\ &= \cancel{p}q \frac{1}{\cancel{p}(1+q)} \end{aligned}$$

2. Calcul de la probabilité de l'événement G .

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n < Y_n]$.

Démonstration.

Soit $n \geq 2$. Remarquons :

L'événement G_n est réalisé

\Leftrightarrow Le joueur A gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche

\Leftrightarrow Il y a égalité à la fin de la 1^{ère} manche

ET il y a égalité à la fin de la 2^{ème} manche

\vdots

ET il y a égalité à la fin de la $(n - 1)^{\text{ème}}$ manche

ET le joueur A obtient Pile avant le joueur B
lors de la $n^{\text{ème}}$ manche

\Leftrightarrow L'événement E_1 est réalisé

ET l'événement E_2 est réalisé

\vdots

ET l'événement E_{n-1} est réalisé

ET l'événement $[X_n < Y_n]$ est réalisé

*(le rang d'apparition du 1^{er} Pile du
joueur A est strictement inférieur au rang
d'apparition du 1^{er} Pile du joueur B)*

\Leftrightarrow L'événement $\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [X_n < Y_n]$ est réalisé

$$\forall n \geq 2, G_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \right) \cap [X_n < Y_n]$$

□

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geq 2, \mathbb{P}(G_n) = \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{q}{1+q}$$

Démonstration.

Soit $k \geq 2$.

• Par des arguments similaires à la question 1.c), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) &= \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}([X_k = Y_k]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}([X_k = i]) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}([Y_k = i]) && \text{(par la formule des probabilités totales)} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}([Y_1 = i]) && (*) \\ &= \mathbb{P}(E_1) && \text{(d'après la question 1.c))} \end{aligned}$$

$$\forall k \geq 2, \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1)$$

- Pour valider le résultat précédent, il faut encore démontrer (*) :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}([X_k = i]) = \mathbb{P}([X_1 = i])$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

- × Si l'événement $E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}$ est réalisé, c'est qu'il y a égalité entre les joueurs A et B lors $(k-1)$ ^{ère} manches du jeu.
 - × Dans ce cas, l'expérience consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité que le joueur A obtienne Pile).
 - × Dans ce cas, la v.a.r. X_k prend pour valeur le rang du premier succès de l'expérience.
- On en conclut que la loi conditionnelle de X_k sachant l'événement $E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}$ est la loi géométrique de paramètre p ($\mathcal{G}(p)$).

En particulier, comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}([X_k = i]) = p(1-p)^{i-1} = \mathbb{P}([X_1 = i])$$

Commentaire

- Cette première partie de la question semble assez ardue pour peu que l'on souhaite faire les choses correctement. Il est difficile de savoir quel était le niveau de détail attendu. La formulation de la question :

« calculer $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k)$ »

laisse penser qu'il fallait détailler l'explication et ne pas se contenter de l'affirmation : $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1)$.

- Dans l'énoncé, il est précisé que les tirages sont indépendants. Pour autant, cela ne signifie pas que les manches le sont. Le résultat d'une manche dépend du résultat de la manche précédente pour la bonne raison qu'une manche n'est jouée que si toutes les précédentes ont abouti à une égalité. En particulier, les événements $E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}$ et E_k ne sont pas indépendants. On peut tout aussi bien démontrer que les événements de la famille $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas indépendants. Par exemple, les événements E_1 et E_2 ne sont pas indépendants.

$$\begin{aligned} \text{Les événements } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont indépendants} &\Leftrightarrow \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2) && (\text{car } E_1 \cap E_2 = E_2 \text{ puisque } E_2 \subset E_1 \text{ (*)}) \\ &\Leftrightarrow 1 = \mathbb{P}(E_1) \times 1 && (\text{car } \mathbb{P}(E_2) \neq 0) \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{p}{1+q} \\ &\Leftrightarrow 1+q = p \\ &\Leftrightarrow 1+(1-p) = p \\ &\Leftrightarrow 2 = 2p \\ &\Leftrightarrow 1 = p \end{aligned}$$

Comme $p \in]0, 1[$, on en conclut bien que E_1 et E_2 ne sont pas indépendants.

(*) Démontrons enfin $E_2 \subset E_1$.

Supposons E_2 réalisé. Il y a donc égalité lors de la 2^{ème} manche. En particulier, la 2^{ème} manche est jouée. Cela démontre qu'il y a eu égalité lors de la manche précédente.

Ainsi, l'événement E_1 est réalisé.

- Soit $n \geq 2$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(G_n) \\
 = & \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [X_n < Y_n]\right) \\
 = & \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-2}}(E_{n-1}) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n < Y_n]) \quad (\text{par la formule des} \\
 & \text{probabilités composées}) \\
 = & \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_1) \times \dots \times \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n < Y_n]) \quad (\text{d'après le} \\
 & \text{point précédent}) \\
 = & \left(\mathbb{P}(E_1)\right)^{n-1} \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n < Y_n])
 \end{aligned}$$

- Comme $([X_n = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n < Y_n]) \\
 = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n = i] \cap [X_n < Y_n]) \\
 = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n = i] \cap [i < Y_n]) \\
 = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n = i]) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([i < Y_n]) \quad (\text{car } X_n \text{ et } Y_n \text{ sont} \\
 & \text{indépendantes}) \\
 = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}([i < Y_1]) \quad (\text{d'après le point (*) précédent}) \\
 = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [i < Y_1]) \\
 = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_1 < Y_1]) \\
 = & \mathbb{P}([X_1 < Y_1]) = \mathbb{P}(G_1) \quad (\text{par la formule} \\
 & \text{des probabilités totales})
 \end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \geq 2, \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n < Y_n]) = \mathbb{P}(G_1)$.

- On déduit de ce qui précède que pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(G_n) &= \left(\mathbb{P}(E_1)\right)^{n-1} \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n < Y_n]) \\
 &= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}
 \end{aligned}$$

$\forall n \geq 2, \mathbb{P}(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}$

□

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

Démonstration.

- D'une part : $\mathbb{P}(G_1) = \frac{q}{1+q}$ d'après la question 1.d).
- D'autre part : $\left(\frac{p}{1+q}\right)^{1-1} \frac{q}{1+q} = \left(\frac{p}{1+q}\right)^0 \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q}$.

Le résultat précédent est valable pour $n = 1$.

□

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul : $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

L'événement G est réalisé

⇔ Le joueur A gagne lors de la 1^{ère} manche
OU le joueur A gagne lors de la 2^{ème} manche
⋮
OU le joueur A gagne lors de la k ^{ème} manche
⋮

⇔ L'événement G_1 est réalisé
OU l'événement G_2 est réalisé
⋮
OU l'événement G_k est réalisé
⋮

⇔ L'événement $\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k$ est réalisé

$$G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k$$

- Remarquons que pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $i \neq j$, on a :

$$G_i \cap G_j = \emptyset$$

En effet, le joueur A ne peut gagner la partie lors de deux manches différentes (d'ailleurs la partie s'arrête lors de la victoire d'un joueur).

• Ensuite :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k) && \text{(car } (G_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{k-1} \frac{q}{1+q} \\
 &= \frac{q}{1+q} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^k && \text{(par décalage d'indice)} \\
 &= \frac{q}{1+q} \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{1+q}\right)} && \text{(en reconnaissant la somme d'une série de raison } \frac{p}{1+q} \in]0, 1[) \\
 &= \frac{q}{1+q} \frac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}} \\
 &= \frac{q}{\cancel{1+q}} \frac{\cancel{1+q}}{(1-p)+q} \\
 &= \frac{q}{q+p}
 \end{aligned}$$

On a bien : $\mathbb{P}(G) = \frac{q}{2q} = \frac{1}{2}$.

□

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que le ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $\mathbb{P}(E) = 0$.

Démonstration.

On procède comme en question **1.d**).

- Les rôles des joueurs A et B sont parfaitement symétriques. Ainsi, le joueurs A et B ont même probabilité de gagner le jeu.

On en déduit que les événements G et H sont équiprobables.

Commentaire

Ce qui est accepté en question **1.d**) doit l'être aussi ici. Cependant, la formulation de la question est ici bien différente et il est donc possible qu'une autre réponse soit attendue. Afin de déterminer $\mathbb{P}(H)$, il est aussi possible de suivre la démarche des questions **2.a)b)c)d**). Plus précisément, on démontre :

$$\times \forall n \geq 2, H_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap [X_n > Y_n],$$

$$\times \forall n \geq 2, \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}([X_n > Y_n]) = \mathbb{P}(H_1),$$

$$\times \forall n \geq 2, \mathbb{P}(H_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q},$$

$$\times H = \bigcup_{k=1}^{+\infty} H_k,$$

$$\times \mathbb{P}(H) = \frac{1}{2}.$$

- Lors de la partie, seules trois situations sont possibles :
 - × le jeu ne prend jamais fin car il y a égalité à chaque manche ou car une manche dure éternellement. Autrement dit, l'événement E est réalisé.
 - × le jeu a pris fin et le joueur A a remporté la partie. Autrement dit, l'événement G est réalisé.
 - × le jeu a pris fin et le joueur B a remporté la partie. Autrement dit, l'événement H est réalisé.
 Ces trois événements sont de plus 2 à 2 incompatibles car s'il y a égalité il n'y a pas de gagnant et s'il y a un gagnant en fin de partie, il ne peut y en avoir qu'un seul.

On en conclut que la famille (E, G, H) est un système complet d'événements.

- En particulier, on a donc :

$$\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H) = 1$$

donc $\mathbb{P}(E) + 2\mathbb{P}(G) = 1$ (car $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(H)$)

ainsi $\mathbb{P}(E) = 1 - 2\mathbb{P}(G) = 1 - 2 \frac{1}{2} = 0$

On a bien : $\mathbb{P}(E) = 0$.

□

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. a) À l'aide du système complet d'événements $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$, montrer : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \frac{pq}{1+q}$.

Démonstration.

Comme $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [Y_1 = X_1 + 1]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [Y_1 = i + 1]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}([Y_1 = i + 1]) && \text{(car } X_1 \text{ et } Y_1 \text{ sont} \\ &&& \text{indépendantes)} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p (1-p)^{i-1} \times p (1-p)^i \\ &= p^2 (1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{2i-2} \\ &= p^2 q \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} && \text{(car } q = 1-p) \\ &= p^2 q \sum_{i=0}^{+\infty} (q^2)^i && \text{(par décalage d'indice)} \\ &= p^2 q \frac{1}{1-q^2} && \text{(en reconnaissant la somme} \\ &&& \text{d'une série géométrique de} \\ &&& \text{raison } q^2 \in]0, 1[) \end{aligned}$$

Enfinement : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = p^2 q \frac{1}{(1-q)(1+q)} = \frac{pq}{1+q}$.

□

- b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

Démonstration.

- Notons D l'événement : « l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart ». On a alors :

$$\begin{aligned}
 & \text{L'événement } D \text{ est réalisé} \\
 \Leftrightarrow & \text{ L'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart} \\
 \Leftrightarrow & \quad \text{Le joueur } A \text{ gagne par un lancer d'écart} \\
 & \text{OU} \quad \text{Le joueur } B \text{ gagne par un lancer d'écart} \\
 \Leftrightarrow & \quad \text{Le joueur } A \text{ obtient Pile un lancer avant le joueur } B \\
 & \text{OU} \quad \text{le joueur } B \text{ obtient Pile un lancer avant le joueur } A \\
 \Leftrightarrow & \quad \text{L'événement } [Y_1 = X_1 + 1] \text{ est réalisé} \\
 & \text{OU} \quad \text{l'événement } [X_1 = Y_1 + 1] \text{ est réalisé} \\
 \Leftrightarrow & \quad \text{L'événement } [Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1] \text{ est réalisé}
 \end{aligned}$$

On en déduit : $D = [Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1]$.

- Par ailleurs, comme $([Y_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X_1 = Y_1 + 1]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_1 = i] \cap [X_1 = Y_1 + 1]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_1 = i] \cap [X_1 = i + 1]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_1 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i + 1]) \quad (\text{car } Y_1 \text{ et } X_1 \text{ sont} \\
 & \quad \text{indépendantes}) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} p (1-p)^{i-1} \times p (1-p)^i \\
 &= \mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) \quad (\text{en reconnaissant le calcul} \\
 & \quad \text{de la question précédente})
 \end{aligned}$$

$\mathbb{P}([X_1 = Y_1 + 1]) = \mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1])$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1]) \\
 &= \mathbb{P}([Y_1 - X_1 = 1] \cup [Y_1 - X_1 = -1]) \\
 &= \mathbb{P}([Y_1 - X_1 = 1]) + \mathbb{P}([Y_1 - X_1 = -1]) \quad (\text{car les événements } [Y_1 - X_1 = 1] \text{ et} \\
 & \quad [Y_1 - X_1 = -1] \text{ sont incompatibles}) \\
 &= \mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) + \mathbb{P}([X_1 = Y_1 + 1]) \\
 &= 2\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) \\
 &= 2 \frac{pq}{1+q}
 \end{aligned}$$

$u = \mathbb{P}(D) = 2 \frac{pq}{1+q}$

Commentaire

- En question 3.a), il est demandé de déterminer $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1])$. Or :

$$[Y_1 = X_1 + 1] = [Y_1 - X_1 = 1]$$

Présenté ainsi, on comprend que cette question n'est rien d'autre qu'une illustration de la technique permettant de calculer la loi d'une somme (en l'occurrence différence) de v.a.r. .

- En question 4.a), il est demandé de déterminer $\mathbb{P}(D)$. Or :

$$D = [Y_1 - X_1 = 1] \cup [Y_1 - X_1 = -1] = [|Y_1 - X_1| = 1]$$

Présenté ainsi, on comprend que cette question n'est rien d'autre qu'une illustration de la technique permettant de calculer la loi d'une somme (en l'occurrence différence) de v.a.r. .

4. a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de \mathbb{N}^* .

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $K_1 = [|Y_1 - X_1| = 1]$.
- Soit $n \geq 2$. Remarquons :

L'événement K_n est réalisé

\Leftrightarrow L'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart

\Leftrightarrow Il y a égalité à la fin de la 1^{ère} manche

ET il y a égalité à la fin de la 2^{ème} manche

\vdots

ET il y a égalité à la fin de la $(n - 1)^{\text{ème}}$ manche

ET l'un des deux joueurs obtient Pile un lancer avant l'autre lors de la $n^{\text{ème}}$ manche

\Leftrightarrow L'événement E_1 est réalisé

ET l'événement E_2 est réalisé

\vdots

ET l'événement E_{n-1} est réalisé

ET l'événement $[|Y_n - X_n| = 1]$ est réalisé

(les rangs d'apparitions du 1^{er} Pile des deux joueurs diffèrent de 1)

\Leftrightarrow L'événement $\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [|Y_n - X_n| = 1]$ est réalisé

$$\forall n \geq 2, K_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [|Y_n - X_n| = 1]$$

□

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(K_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question **3.b**) : $\mathbb{P}(K_1) = u = 2 \frac{pq}{1+q}$.
- Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(K_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [|Y_n - X_n| = 1]\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(|Y_n - X_n| = 1) && \text{(par la formule des probabilités composées)} \\
 &= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(|Y_n - X_n| = 1) && \text{(d'après la question 2.b)} \\
 &= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \mathbb{P}(|Y_1 - X_1| = 1) && \text{(en mettant en place un raisonnement similaire à celui de la question 2.b)} \\
 &= 2p \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q} && \text{(d'après la question 3.d)} \\
 &= 2p \mathbb{P}(G_n)
 \end{aligned}$$

En remarquant que cette formule est valide au rang 1, on conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(K_n) = 2p \mathbb{P}(G_n)$. □

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Démonstration.

- Tout d'abord, par des arguments similaires à la question **2.d**) :

$$K = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(K) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(K_j) && \text{(car } (K_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \text{ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
 &= 2p \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_j) && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &= 2p \mathbb{P}(G)
 \end{aligned}$$

Finalement : $\mathbb{P}(K) = 2p \mathbb{P}(G) = 2p \frac{1}{2} = p$. □

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'geom', p)` permet à **Scilab** de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

6. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
1  p = input('entrez une valeur pour p : ')
2  c = 1
3  X = grand(1, 1, 'geom', p)
4  Y = grand(1, 1, 'geom', p)
5  while X == Y
6      X = ----
7      Y = ----
8      c = ----
9  end
10 if X < Y then ----
11     else ----
12 end
13 disp(c)
```

Démonstration.

- **Début du programme**

La valeur de p est choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```
1  p = input('entrez la valeur de p : ')
```

Le programme introduit alors une variable c qui est un compteur de tours de boucle. Il s'agit ici de garder en mémoire la manche qui est jouée.

```
1  c = 1
```

La variable c est affectée à 1, ce qui signifie que l'on s'apprête à simuler la première manche.

- **Simulation de X_1 et de Y_1**

D'après la question 1.a), la v.a.r. X_1 (resp. Y_1) suit la loi $\mathcal{G}(p)$. On stocke alors dans la variable X (resp. Y) une simulation de la v.a.r. X_1 (resp. Y_1) à l'aide des appels suivants :

```
3  X = grand(1, 1, 'geom', p)
4  Y = grand(1, 1, 'geom', p)
```

- **Structure itérative**

× Le programme met alors en place une structure itérative dans le but de simuler la partie. La partie prend fin lorsque l'un des deux joueurs obtient un Pile avant l'autre. Elle doit donc continuer tant que les deux joueurs obtiennent Pile lors du même rang.

```
5  while X == Y
```

× Avant d'entrer dans la boucle, la première manche a été simulée. Lors de l'entrée dans la boucle, c'est-à-dire lors du 1^{er} tour de boucle, on simule la deuxième manche. De manière générale, lors de $k^{\text{ème}}$ tour de boucle, on simule la manche $k + 1$. Plus précisément, on simule les v.a.r. X_{k+1} et Y_{k+1} . On obtient ainsi deux valeurs qui permettent de mettre à jour les variables X et Y .

```
6      X = grand(1, 1, 'geom', p)
7      Y = grand(1, 1, 'geom', p)
```

La manche est alors considérée comme achevée. On jouera la prochaine seulement si la condition de boucle est vérifiée, c'est-à-dire si les valeurs de X et Y sont égales.

- × On met enfin à jour le compteur de tours de boucle car une manche de plus vient de s'achever.

```
8      c = c + 1
```

• **Structure conditionnelle**

En sortie de boucle, on est assuré que les valeurs des variables X et Y sont différentes. Cela signifie que l'un des deux joueurs a gagné la dernière manche effectuée. Il reste à déterminer lequel. Pour ce faire, il faut savoir lequel a obtenu Pile avant l'autre. Plus précisément si X contient une valeur strictement plus petite que Y c'est que le joueur A a gagné. Sinon, c'est le joueur B qui a remporté la partie.

```
10  if X < Y then
11      disp('Le joueur A emporte la partie')
12  else
13      disp('Le joueur B emporte la partie')
14  end
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question. On procédera de même pour la question **Scilab** suivante.
- On doit s'interroger sur la terminaison de la boucle **while**. A priori, il n'est pas clair que cette boucle se termine : on peut théoriquement obtenir une suite infinie de d'égalités. Cependant, on a démontré que l'événement E : « il y a perpétuellement égalité » est quasi impossible. Ainsi, la boucle termine presque sûrement. □

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
16  if ----- then disp('A gagne le deuxième jeu') else ----- end
```

Démonstration.

• **Structure conditionnelle**

Comme on l'a vu dans la question précédente, en sortie de boucle, on est assuré que les valeurs des variables X et Y sont différentes. Il s'agit alors de vérifier si le joueur A a gagné la partie. C'est le cas si et seulement si le rang d'apparition du premier Pile diffère seulement de 1 lors de la dernière manche. Pour s'en assurer on teste si les valeurs des variables X et Y diffèrent de 1 (on peut aussi faire le test **if** $(X == Y+1) \mid (Y == X+1)$).

```
16  if abs(X-Y) == 1 then
17      disp('A gagne le deuxième jeu')
18  else
19      disp('B gagne le deuxième jeu')
20  end
```

□