

DS4 (version B)

Exercice

- Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E :
 - × on note $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition),
 - × on pose $f^0 = \text{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E .
- On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$f^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$$

- Enfin, on note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$A^k = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad A^{k-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

(avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2 .
2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k .
 - a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.
 - b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.
 - c) En déduire alors : $a + d = 0$.
3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension 2.

4. a) Montrer que, si $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - b) On suppose : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
Établir alors : $\text{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
 - c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent d'indice 2 et on en étudie quelques propriétés.

5. a) L'endomorphisme f est-il bijectif?
 - b) Déterminer les valeurs propres possibles de f . En déduire $\text{Sp}(f)$.
 - c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
6. Montrer qu'il existe une base (e'_1, e'_2) de E telle que : $\text{Mat}_{(e'_1, e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E , nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

- a) Montrer les inclusions : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$.
- b) En déduire les égalités : $\text{Im}(f) = \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(f)$.
- c) En déduire l'égalité : $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$.
- d) Conclure.

Problème

- Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles existent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.
- Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, N \rrbracket$.
- On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* : $T_n = \max(U_1, U_2, \dots, U_n)$ et $Z_n = \min(U_1, U_2, \dots, U_n)$.
 On admet que T_n et Z_n sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$T_n(\omega) = \max(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)) \quad \text{et} \quad Z_n(\omega) = \min(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega))$$

- On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* : $d_n(N) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geq 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$

Préliminaires : fourre-tout (définitions et propriétés)

Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$.

1. Établir les deux relations suivantes :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y > k]) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}([Y > k])$$

2. Si $B \in \mathcal{A}$ est un événement de probabilité non nulle, on appelle espérance conditionnelle de Y sachant l'événement B , le réel défini par :

$$\mathbb{E}_B(Y) = \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}_B([Y = k]) \quad (\text{c'est la formule de l'espérance dans laquelle } \mathbb{P} \text{ a été remplacé par } \mathbb{P}_B)$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ un système complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale** :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{E}_{A_i}(Y)$$

3. Pour tout $C \in \mathcal{A}$, on appelle variable aléatoire indicatrice de l'événement C et on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

- a) Soit $C \in \mathcal{A}$. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_C$. En particulier, donner l'espérance de $\mathbb{1}_C$.
- b) Soit $(C, D) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Démontrer :
 - (i) $\mathbb{1}_{C \cap D} = \mathbb{1}_C \times \mathbb{1}_D$.
 - (ii) $\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_{\bar{C}} = 1$.

Partie I. Min et Max

4. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $\mathbb{E}(U_1)$ et de $\mathbb{V}(U_1)$.
5. a) Calculer, pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbb{P}([T_n \leq k])$.
b) En déduire la loi de probabilité de T_n .
6. a) Montrer que la suite $(d_n(N))_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.
b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de N et de $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.
c) Établir la formule suivante : $\mathbb{V}(T_n) = (2N - 1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(T_n)$.
d) Montrer que si $N \geq 2$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}$.
En déduire que l'on a : $\mathbb{V}(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} d_n(N)$.
7. Déterminer la loi de Z_n . Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.
8. On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$. Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function T = simulmax(n)` qui simule la variable aléatoire T_n .

Partie II. Couple (Min, Max)

9. On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout couple (k, ℓ) de \mathbb{N}^2 : $\phi_n(k, \ell) = \mathbb{P}([T_n \leq k] \cap [Z_n \leq \ell])$.
- a) Montrer, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, la relation suivante :
- $$\phi_n(k, \ell) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leq \ell \\ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$
- b) Établir, pour tout (k, ℓ) de $\llbracket 1, N \rrbracket^2$, la formule suivante :
- $$\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \phi_n(k, \ell) + \phi_n(k-1, \ell-1) - \phi_n(k-1, \ell) - \phi_n(k, \ell-1)$$
- c) En déduire, en distinguant les cas $k < \ell$, $k = \ell$ et $k > \ell$, l'expression de $\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$ en fonction de k et ℓ .
10. On donne, pour tout couple (m, n) de $(\mathbb{N}^*)^2$, les deux relations suivantes :
- (i) $\sum_{j=1}^m ((j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n) = (m+1)^n - m^n - 1$;
- (ii) $\sum_{j=1}^m j((j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n) = m(m+1)^n - (m+1)m^n$.
- a) En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^* , la formule suivante : $\mathbb{E}(T_n Z_n) = N(1 + d_{n+1}(N))$.
- b) On note, pour tout n de \mathbb{N}^* , ρ_n le coefficient de corrélation linéaire entre T_n et Z_n . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n$ lorsque $N \geq 2$.

- 11. a)** Pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout couple (k, ℓ) de $\llbracket 1, N \rrbracket^2$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[T_n=k]}([Z_n = \ell])$.
- b)** En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$, l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(Z_n)$.

Partie III. Prévision

- Pour n entier de \mathbb{N}^* , on dispose d'un $(n + 1)$ -échantillon indépendant et identiquement distribué $(U_1, U_2, \dots, U_{n+1})$ de la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$.
- On pose : $T_n = \max(U_1, U_2, \dots, U_n)$ et $T_{n+1} = \max(U_1, U_2, \dots, U_{n+1}) = \max(T_n, U_{n+1})$.
- Pour tout $t = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ de \mathbb{R}^N , on pose : $W_t(T_n) = \sum_{k=1}^N t_k \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$.

Dans cette partie, on se propose de déterminer la valeur de t pour laquelle les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i)** $\mathbb{E}(W_t(T_n)) = \mathbb{E}(T_{n+1})$;
- (ii)** $\mathbb{E}\left((T_{n+1} - W_t(T_n))^2\right)$ est minimale.

- 12.** Montrer, pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$, la relation : $\mathbb{P}([W_t(T_n) = t_k]) = \mathbb{P}([T_n = k])$.
- 13.** Établir, pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$, la formule suivante : $\mathbb{E}(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}) = \mathbb{P}([T_n = k]) \times \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$.
- 14. a)** Calculer, pour tout couple (k, j) de $\llbracket 1, N \rrbracket^2$, $\mathbb{P}([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j])$.
- b)** En déduire, pour tout couple (k, j) de $\llbracket 1, N \rrbracket^2$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[T_n=k]}([T_{n+1} = j])$.
- c)** Déterminer, pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$, l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$.
- d)** En appliquant la formule de l'espérance totale, déduire de la question précédente la relation suivante :

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} \left(\mathbb{E}(T_n^2) - \mathbb{E}(T_n) \right)$$

- 15.** Établir l'égalité suivante : $(W_t(T_n))^2 = \sum_{k=1}^N t_k^2 \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$.

- 16.** Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^N à valeurs réelles par :

$$g(t_1, t_2, \dots, t_N) = \mathbb{E}\left((T_{n+1} - W_t(T_n))^2\right)$$

- a)** À l'aide des résultats des questions **13**, **14** et **15**, expliciter g en fonction des variables t_1, t_2, \dots, t_N .
- b)** Montrer que g admet un minimum global sur \mathbb{R}^N atteint en un point $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ que l'on déterminera en fonction de $\mathbb{E}_{[T_n=1]}(T_{n+1}), \mathbb{E}_{[T_n=2]}(T_{n+1}), \dots, \mathbb{E}_{[T_n=N]}(T_{n+1})$.
- 17.** Établir les deux relations suivantes : $\mathbb{E}(W_\theta(T_n)) = \mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{V}(W_\theta(T_n)) \leq \mathbb{V}(T_{n+1})$.

- 18. a)** Établir, pour tout i de \mathbb{N}^* , l'égalité suivante : $\sum_{k=1}^N k^i \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = (T_n)^i$.

- b)** En déduire la relation suivante : $W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (T_n^2 - T_n)$.