
DS5 (version A)

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E .

Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3$$

Partie A : Exemple de matrices appartenant à \mathcal{A}

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que : $\alpha I_3 \in \mathcal{A}$.

2. L'ensemble \mathcal{A} est-il un sous-espace vectoriel de E ?

3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B X_1$ et $B X_2$.

b) En déduire deux valeurs propres de B .

Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.

d) Démontrer que $D \in \mathcal{A}$, puis que $B \in \mathcal{A}$.

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

Démontrer : $M \in \mathcal{A}$.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de \mathcal{A}

Soit M une matrice appartenant à \mathcal{A} . On note $\text{Sp}(M)$ le spectre de M .

5. Déterminer un polynôme annulateur de M , et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

6. On suppose dans cette question que M admet 0 , -1 et -2 comme valeurs propres.
Justifier que M est diagonalisable.

7. a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M .
Justifier que M et $M + 2I_3$ sont inversibles, puis démontrer : $M = -I_3$.

b) Que peut-on dire de M si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\text{Sp}(M) = \{0\}$?

8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.

Justifier que les matrices M , $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.

On traite ici le cas où $\text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).

On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable, et on suppose donc que M ne l'est pas. On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est M . On note enfin id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 .

a) Démontrer :

$$(f + \text{id}) \circ (f + 2\text{id}) = 0 \quad \text{et} \quad (f + 2\text{id}) \circ (f + \text{id}) = 0$$

b) Démontrer : $\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) \geq 1$ et $\dim(\text{Ker}(f + 2\text{id})) \geq 1$.

c) En utilisant que M n'est pas diagonalisable, démontrer :

$$\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(f + 2\text{id})) = 1$$

d) Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1 .

Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2 .

(i) Justifier que (u, v) forme une famille libre dans \mathbb{R}^3 .

(ii) Soit w un vecteur de \mathbb{R}^3 n'appartenant pas à $\text{Vect}(u, v)$.

Montrer que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

(iii) En utilisant le fait que $((f + \text{id}) \circ (f + 2\text{id}))(w) = 0$ et $((f + 2\text{id}) \circ (f + \text{id}))(w) = 0$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(w) + 2w = \alpha u \quad \text{et} \quad f(w) + w = \beta v$$

En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v , et aboutir à une contradiction.

10. Montrer alors que pour toute matrice M de E :

$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. a) Démontrer : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$.

b) Démontrer : $\forall y \in]0, 1], \int_y^1 \ln(t) dt = -1 + y - y \ln(y)$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et déterminer sa valeur.

c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

2. a) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.

b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n .

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in]0, 1], \quad 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t)$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$.

c) Déduire des questions précédentes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$.

5. a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leq \ln(x) \leq x$.

En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de **Scilab**.

5. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0, 1]$.

À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, démontrer :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du$$

6. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

a) Donner une densité de X .

b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}$.

Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et : $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$.

7. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'exp', 1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m , et qui renvoie une matrice à une ligne et m colonnes dont chaque coefficient est une simulation de la réalisation de Y_n .

```

1  function Y = simulY(n, m)
2      Y = zeros(..., ...)
3      for i = .....
4          X = grand(1, 1, 'exp', 1)
5          Y(i) = .....
6      end
7  endfunction
    
```

8. a) (CUBES uniquement) Énoncer la loi faible des grands nombres.

b) (CUBES uniquement) On tape dans **Scilab** le script suivant :

```

1  n = input(' Entrer la valeur de n')
2  disp( mean( simulY(n, 1000) ) )
    
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y .

b) On note F la fonction de répartition de Y . Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leq 0$.

2. a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X .

b) On note G la fonction de répartition de X . Déterminer $G(x)$ selon que $x \geq 1$ ou $x < 1$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X .

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n . Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x .

b) On pose $Y_n = \frac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\frac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$.

b) Donner un équivalent de $\ln(1 + u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. (CUBES uniquement) Conclure que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y .