

DS5 (version A) /172

Exercice 1 /71

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E .

Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3$$

Partie A : Exemple de matrices appartenant à \mathcal{A}

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que : $\alpha I_3 \in \mathcal{A}$.

- 1 pt : $\alpha I_3 \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$
- 1 pt : $\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ OU } \alpha = -1 \text{ OU } \alpha = -2$

2. L'ensemble \mathcal{A} est-il un sous-espace vectoriel de E ?

- 1 pt : d'après la question précédente, $-I_3 \in \mathcal{A}$ mais $-(-I_3) = I_3 \notin \mathcal{A}$

3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2 .

- 1 pt : $BX_1 = -2X_1$
- 1 pt : $BX_2 = -X_2$

b) En déduire deux valeurs propres de B .

Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.

- 1 pt : $X_1 \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $BX_1 = -2X_1$, donc -2 est valeur propre de B
- 1 pt : $X_2 \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $BX_2 = -X_2$, donc -1 est valeur propre de B

- 3 pts : $E_{-2}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

× 1 pt : écriture système $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

× 1 pt : résolution système $\{x = y - z\}$

× 1 pt : $E_{-2}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

- **2 pts** : $\mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ base de $E_{-2}(B)$

- × **1 pt** : libre

- × **1 pt** : génératrice de $E_{-2}(B)$

- **2 pts** : $E_{-1}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(X_2)$

- **1 pt** : (X_2) base de $E_{-1}(B)$

c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.

- **1 pt** : $\dim(E_{-2}(B)) = \text{Card}(\mathcal{F}_{-2}) = 2$ et $\dim(E_{-1}(B)) = \text{Card}(\mathcal{F}_{-1}) = 1$

- **1 pt** : $\dim(E_{-2}(B)) + \dim(E_{-1}(B)) = 3$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc B diagonalisable.

- **1 pt** : il existe P inversible obtenue par concaténation de bases de sous-espaces propres de B . Donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- **1 pt** : il existe D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B . Donc : $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) Démontrer que $D \in \mathcal{A}$, puis que $B \in \mathcal{A}$.

- **2 pt** : $D \in \mathcal{A}$

- × **1 pt** : $(D + I_3)(D + 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- × **1 pt** : $D(D + I_3)(D + 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- **4 pt** : $B \in \mathcal{A}$

- × **1 pt** : $D(D + I_3)(D + 2I_3) = D^3 + 3D^2 + 2D$

- × **1 pt** : par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, (P^{-1}BP)^n = P^{-1}B^nP$

- × **2 pts** : $P^{-1}B^3P + 3P^{-1}B^2P + 2P^{-1}BP = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ donc $B(B + I_3)(B + 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

Démontrer : $M \in \mathcal{A}$.

- **1 pt** : comme M diagonalisable, il existe R inversible et Δ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M , telles que : $M = R\Delta R^{-1}$.

- **1 pt** : $\text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{0, -1, -2\}^3$ tel que : $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

- **1 pt** : $\Delta(\Delta + I_3)(\Delta + 2I_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2 + 1)(\lambda_2 + 2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\lambda_3 + 1)(\lambda_3 + 2) \end{pmatrix}$

- **1 pt** : comme $\lambda_i \in \{0, -1, -2\}$, alors : $\lambda_i(\lambda_i + 1)(\lambda_i + 2) = 0$

- **1 pt** : $\Delta(\Delta + I_3)(\Delta + 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, donc, en raisonnant comme en question précédente : $M \in \mathcal{A}$

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de \mathcal{A}

Soit M une matrice appartenant à \mathcal{A} . On note $\text{Sp}(M)$ le spectre de M .

5. Déterminer un polynôme annulateur de M , et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

- 1 pt : Le polynôme $Q(X) = X(X+1)(X+2)$ est un polynôme annulateur de M
- 1 pt : $\text{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, -1, -2\}$

6. On suppose dans cette question que M admet $0, -1$ et -2 comme valeurs propres. Justifier que M est diagonalisable.

- 1 pt : $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M possède 3 valeurs propres distinctes, donc M est diagonalisable.

7. a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M . Justifier que M et $M + 2I_3$ sont inversibles, puis démontrer : $M = -I_3$.

- 1 pt : Comme -1 est l'unique valeur propre de M , alors 0 et -2 ne sont pas valeurs propres de M . On en déduit que M et $M + 2I_3$ sont inversibles.
- 1 pt : comme $M \in \mathcal{A}$, alors $M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$
- 1 pt : $M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ donc $M = -I_3$

b) Que peut-on dire de M si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\text{Sp}(M) = \{0\}$?

- 1 pt : Si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$, alors M et $M + I_3$ sont inversibles. Comme $M \in \mathcal{A}$, on a toujours : $M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. En multipliant à gauche l'égalité successivement par M^{-1} puis $(M + I_3)^{-1}$, on obtient : $M = -2I_3$.
- 1 pt : Si $\text{Sp}(M) = \{0\}$, alors $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles. Comme $M \in \mathcal{A}$, on a toujours : $M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. En multipliant à droite l'égalité successivement par $(M + 2I_3)^{-1}$ puis $(M + I_3)^{-1}$, on obtient : $M = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.

Justifier que les matrices $M, M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

- 1 pt : Comme M n'admet aucune valeur propre, alors $0, -1$ et -2 ne sont pas valeurs propres de M . On en déduit que $M, M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles
- 1 pt : comme $M \in \mathcal{A}$, en multipliant à gauche par M^{-1} , à droite par $(M + I_3)^{-1}$, puis par $(M + 2I_3)^{-1}$, on obtient : $I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$
- 1 pt : M admet donc au moins une valeur propre

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.

On traite ici le cas où $\text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).

On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable, et on suppose donc que M ne l'est pas. On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est M . On note enfin id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 .

a) Démontrer :

$$(f + \text{id}) \circ (f + 2\text{id}) = 0 \quad \text{et} \quad (f + 2\text{id}) \circ (f + \text{id}) = 0$$

- 3 pts : $(f + \text{id}) \circ (f + 2\text{id}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$
 - × 1 pt : $\text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$, donc M inversible.
 - × 1 pt : comme $M \in \mathcal{A}$, alors $(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$
 - × 1 pt : par isomorphisme de représentation $(f + \text{id}) \circ (f + 2\text{id}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

- **2 pts** : $(f + 2 \text{id}) \circ (f + \text{id}) = (f + \text{id}) \circ (f + 2 \text{id})$
- × **1 pt** : $(M + I_3)(M + 2I_3) = M^2 + 3M + 2I_3 = (M + 2I_3)(M + I_3)$
- × **1 pt** : **par isomorphisme de représentation, on conclut**

b) Démontrer : $\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) \geq 1$ et $\dim(\text{Ker}(f + 2\text{id})) \geq 1$.

- **1 pt** : **comme M est une matrice représentative de f , alors** : $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$
- **1 pt** : **On en déduit** : $\text{Ker}(f + \text{id}) = E_{-1}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\text{Ker}(f + 2 \text{id}) = E_{-2}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

c) En utilisant que M n'est pas diagonalisable, démontrer :

$$\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(f + 2 \text{id})) = 1$$

- **1 pt** : **comme $\text{Sp}(f) = \{-1, -2\}$, et que la matrice M n'est pas diagonalisable, alors l'endomorphisme f non plus. On en déduit** : $\dim(E_{-1}(f)) + \dim(E_{-2}(f)) < \dim(\mathbb{R}^3)$
- **1 pt** : **Or la dimension d'un espace vectoriel est un entier. On en conclut** : $\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) + \dim(\text{Ker}(f + 2 \text{id})) \leq 2$
- **1 pt** : **d'après la question précédente** : $\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) + \dim(\text{Ker}(f + 2 \text{id})) \geq 2$
- **1 pt** : **on conclut en remarquant que chacun des termes de la somme de gauche appartient à \mathbb{N}^***

d) Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1 .
Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2 .

(i) Justifier que (u, v) forme une famille libre dans \mathbb{R}^3 .

- **1 pt** : **La famille (u, v) est la concaténation de deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes. Ils forment donc une famille libre.**

(ii) Soit w un vecteur de \mathbb{R}^3 n'appartenant pas à $\text{Vect}(u, v)$.
Montrer que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

- **1 pt** : **Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons** : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$ (*).
- **1 pt** : **démonstration par l'absurde de $\lambda_3 = 0$**
- **1 pt** : **en reprenant (*) et utilisant la liberté de (u, v) , on en déduit que (u, v, w) libre**
- **1 pt** : **Card $((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$**

(iii) En utilisant le fait que $((f + \text{id}) \circ (f + 2 \text{id}))(w) = 0$ et $((f + 2 \text{id}) \circ (f + \text{id}))(w) = 0$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(w) + 2w = \alpha u \quad \text{et} \quad f(w) + w = \beta v$$

En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v , et aboutir à une contradiction.

- **1 pt** : **d'après 9.a), $(f + \text{id})(f(w) + 2w) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $f(w) + 2w \in E_{-1}(f)$**
- **2 pt** : **$E_{-1}(f) = \text{Vect}(u)$**
- × **1 pt** : **(u) libre**
- × **1 pt** : **Card $((u)) = 1 = \dim(E_{-1}(f))$ (d'après la question 9.c))**
- **1 pt** : **$f(w) + 2w \in \text{Vect}(u)$, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $f(w) + 2w = \alpha u$**
- **1 pt** : **$f(w) + w \in \text{Ker}(f + 2 \text{id}) = E_{-2}(f)$**

- **1 pt** : $E_{-2}(f) = \text{Vect}(v)$. Il existe donc $\beta \in \mathbb{R}$ tel que : $f(w) + w = \beta v$
- **1 pt** : $w = \alpha u - \beta v \in \text{Vect}(u, v)$. Absurde !
- **1 pt** : M est donc diagonalisable

10. Montrer alors que pour toute matrice M de E :

$$M \in \mathcal{A} \iff M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$

- **1 pt** : (\Leftarrow) d'après 4.
- **5 pt** : (\Rightarrow)
 - × **1 pt** : d'après 5., $\text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$
 - × **1 pt** : si M admet 3 valeurs propres distinctes, alors, d'après la question 6., la matrice M est diagonalisable.
 - × **1 pt** : si M admet exactement 2 valeurs propres distinctes, alors, d'après la question 9., la matrice M est diagonalisable.
 - × **1 pt** : si M admet exactement 1 valeur propre, alors, d'après la question 7. : $M = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ OU $M = -I_3$ OU $M = -2I_3$. Dans ces 3 cas, M est diagonale donc diagonalisable
 - × **1 pt** : d'après la question 8., il n'est pas possible que M n'admette aucune valeur propre.

Exercice 2 /59

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. a) Démontrer : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$.

• 1 pt

b) Démontrer : $\forall y \in]0, 1]$, $\int_y^1 \ln(t) dt = -1 + y - y \ln(y)$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et déterminer sa valeur.

• 1 pt : IPP

• 1 pt : validité car $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[y, 1]$

• 1 pt : $\int_y^1 \ln(t) dt = -1 + y - y \ln(y)$

• 1 pt : par croissances comparées, $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente et : $\int_0^1 \ln(t) dt = -1 + 0 - 0 = -1$

c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

• 1 pt : la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $]0, 1]$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ est donc uniquement impropre en 0.

• 3 pts : critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives

× 1 pt : $\forall t \in]0, 1]$, $-\frac{\ln(t)}{1+t^n} \geq 0$ et $-\ln(t) \geq 0$

× 1 pt : d'après 1.a), $-\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t)$

× 1 pt : l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente d'après la question précédente.

L'intégrale $\int_0^1 -\ln(t) dt$ l'est donc aussi

2. a) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.

• 1 pt : $t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{t^n} = \frac{\ln(t)}{t^{n-\frac{3}{2}}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées car $n - \frac{3}{2} > 0$
 (car $n \geq 2$)

b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n .

- **1 pt** : la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ est donc **uniquement impropre en $+\infty$** .
- **3 pts** : critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives
 - × **1 pt** : d'après 2.a) : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \right)$
 - × **1 pt** : $\forall t \in [1, +\infty[$, $\frac{\ln(t)}{1+t^n} \geq 0$ et $\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \geq 0$.
 - × **1 pt** : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2} > 1$). Elle est donc convergente.

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

- **1 pt** : La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
- **2 pts** : I_n convergente
 - × **1 pt** : d'après la question 1., l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ est convergente.
 - × **1 pt** : d'après la question 2., l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ est convergente.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in]0, 1], \quad 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t)$$

- **1 pt** : cas $t = 1$
- **2 pts** : cas $t \in]0, 1[$
 - × **1 pt** : $0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t) \Leftrightarrow 0 \geq \frac{1}{1+t^n} - 1 \geq -t^n$ (car, comme $t \in]0, 1[$: $\ln(t) < 0$)
 - × **1 pt** : $0 \geq \frac{1}{1+t^n} - 1 \geq -t^n \Leftrightarrow 0 \leq 1 \leq 1+t^n$

b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$.

- **1 pt** : La fonction $t \mapsto -t^n \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$. L'intégrale $\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$ est donc **uniquement impropre en 0**.
- **1 pt** : IPP
- **1 pt** : Cette IPP est valide car les fonctions $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{n+1} t^{n+1}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[A, 1]$

- 1 pt : $\int_A^1 -t^n \ln(t) dt = \frac{1}{n+1} A^{n+1} \ln(A) + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} A^{n+1}$

- 1 pt : par croissances comparées, on a la conclusion

c) Dédurre des questions précédentes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$.

- 1 pt : D'après la question 4.a), pour tout $t \in]0, 1]$: $\ln(t) \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} \leq \ln(t) - t^n \ln(t)$

- 1 pt : d'après 1.b), 1.c), les intégrales $\int_0^1 \ln(t) dt$, $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ et $\int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t) dt$ sont convergentes

- 1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$), et les intégrales en présence convergentes : $-1 \leq J_n \leq \int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t) dt$

- 1 pt : $\int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t) dt = -1 + \frac{1}{(n+1)^2}$

- 1 pt : par théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$

5. a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leq \ln(x) \leq x$.

En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

- 3 pts : $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \ln(x) \leq x$

- × 1 pt : La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$. Sa courbe représentative C_f est donc située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1

- × 1 pt : cette tangente est la droite d'équation $y = f(1) + f'(1)(x-1) = x-1$

- × 1 pt : $\ln(x) \leq x-1 \leq x$

- 2 pts : $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$

- × 1 pt : $x^n \leq 1+x^n$ donc $\frac{1}{x^{n-1}} \geq \frac{x}{1+x^n}$

- × 1 pt : par transitivité $0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{x}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$

b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$.

- 1 pt : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ est convergente d'après 2.b)

- 1 pt : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}} dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $n-1$ ($n-1 > 1$ car $n \geq 3$). Elle est donc convergente.

- 1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($1 \leq +\infty$), et les intégrales en présence convergentes : $0 \leq K_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}} dt$

- 1 pt : $\int_1^B \frac{1}{t^{n-1}} dt = \frac{1}{-n+2} \left(\frac{1}{B^{n-2}} - 1 \right) \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-2}$

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

• 1 pt : par théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$

• 1 pt : par relation de Chasles (car les intégrales en présence sont convergentes) :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = J_n + K_n$$

• 1 pt : d'après les questions précédentes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -1$

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de **Scilab**.

5. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0, 1]$.

À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, démontrer :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du$$

• 1 pt : Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto e^{-u}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, -\ln(y)]$

• 1 pt : calcul

6. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

a) Donner une densité de X .

• 1 pt : Une densité f_X de X est : $f_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}$.

Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et : $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$.

• 1 pt : Par théorème de transfert, la v.a.r. Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+e^{-nu}} f_X(u) du$ est absolument convergente.

• 1 pt : $\left| \frac{-u}{1+e^{-nu}} f_X(u) \right| = \frac{u}{1+e^{-nu}} e^{-u}$

• 1 pt : d'après 1.c, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ est convergente

• 1 pt : d'après 5., comme $\lim_{y \rightarrow 0} -\ln(y) = +\infty$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du$ est également convergente. Donc Y_n admet une espérance.

• 1 pt : $\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = J_n$

7. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'exp', 1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m , et qui renvoie une matrice à une ligne et m colonnes dont chaque coefficient est une simulation de la réalisation de Y_n .

```
1 function Y = simulY(n, m)
2     Y = zeros(..., ...)
3     for i = .....
4         X = grand(1, 1, 'exp', 1)
5         Y(i) = .....
6     end
7 endfunction
```

• 3 pts : 1 pt par ligne

```
2     Y = zeros(1, m)
```

```
3     for i = 1:m
```

```
5         Y(i) = -X / (1 + exp(-n * X))
```

8. a) (CUBES uniquement) Énoncer la loi faible des grands nombres.

• 2 pts : tout ou rien

b) (CUBES uniquement) On tape dans **Scilab** le script suivant :

```
1 n = input(' Entrer la valeur de n')
2 disp( mean( simulY(n, 1000) ) )
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

• 4 pts :

- × 1 pt : le script permet d'afficher une approximation de $\mathbb{E}(Y_n)$
- × 1 pt : $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$
- × 1 pt : le terme LfGN apparaît
- × 1 pt : une explication de son utilisation est faite

Exercice 3 /42

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y .

• 1 pt : La fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0

• 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

• 4 pts : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et vaut 1

× 1 pt : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ car f est nulle en dehors de $]0, +\infty[$

× 1 pt : L'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est convergente et vaut e^{-1}

× 1 pt : L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et vaut $1 - e^{-1}$

× 1 pt : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut $e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1$

b) On note F la fonction de répartition de Y . Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leq 0$.

• 1 pt : On considère : $Y(\Omega) =]0, +\infty[$

• 1 pt : si $x \leq 0$, alors $F(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

• 1 pt : si $x > 0$, alors $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ car f est nulle en dehors de $]0, +\infty[$

• 1 pt : $\int_A^x f(t) dt \xrightarrow{A \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

• 1 pt : si $x > 0$, alors $F(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

2. a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X .

• 1 pt : La fonction g est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1

• 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$

• 3 pts : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ est convergente et vaut 1

× 1 pt : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} g(x) dx$ car g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$

× 1 pt : la fonction g est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ est uniquement impropre en $+\infty$

× 1 pt : $\int_1^B g(x) dx \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} 1$

b) On note G la fonction de répartition de X . Déterminer $G(x)$ selon que $x \geq 1$ ou $x < 1$.

- 1 pt : on considère : $X(\Omega) = [1, +\infty[$
- 1 pt : si $x < 1$, alors $G(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- 1 pt : si $x \geq 1$, alors $G(x) = \int_1^x g(t) dt$ car g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$
- 1 pt : si $x \geq 1$, alors $G(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

3. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X .

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n . Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x .

- 1 pt : $M_n(\Omega) \subset [1, +\infty[$
- 1 pt : si $x < 1$, alors $G_n(x) = \mathbb{P}([M_n \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- 4 pts : cas $x \geq 1$
 - × 1 pt : $[M_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]$
 - × 1 pt : $G_n(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i \leq x])$ (car X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes)
 - × 1 pt : $G_n(x) = (G(x))^n$ (car X_1, \dots, X_n ont même loi que X)
 - × 1 pt : comme $x \geq 1$, alors $G_n(x) = (1 - \frac{1}{x^2})^n$

b) On pose $Y_n = \frac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

- 1 pt : $Y_n(\Omega) \subset \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$
- 1 pt : si $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $F_n(x) = \mathbb{P}([Y_n \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- 2 pts : cas $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$
 - × 1 pt : $F_n(x) = \mathbb{P}([M_n \leq x\sqrt{n}]) = G_n(x\sqrt{n})$ (car $\sqrt{n} > 0$)
 - × 1 pt : $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$ (car, comme $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $x\sqrt{n} \geq 1$)

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- 1 pt : Comme $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors d'après la question précédente $F_n(x) = 0$
- 1 pt : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$

5. a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\frac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$.

• 2 pt : si $n > \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor$, alors $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

• 1 pt : comme $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, d'après la question 3.b) : $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$

b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

• 1 pt : $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$

• 1 pt : si $n > \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor$, alors $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right)$

• 1 pt : Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{nx^2} = 0$, alors $n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$

• 1 pt : $\forall x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ par continuité de la fonction \exp en $-\frac{1}{x^2}$

6. Conclure que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y .

• 1 pt : si $x \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$ et $F(x) = 0$

• 1 pt : si $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ et $F(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

• 1 pt : F est la fonction de répartition de Y et F_n est la fonction de répartition de Y_n