

## DS5 (version B)

### Problème I

Dans tout le problème,  $n$  est un entier tel que  $n \geq 2$ .

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre  $n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles à une colonne et  $n$  lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors  ${}^tA$  désigne la matrice transposée de  $A$ .

Si  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors  ${}^tV$  désigne la matrice transposée de  $V$ .

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et si  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , alors le coefficient de la ligne numéro  $i$  et de la colonne numéro  $j$  de  $A$  est notée  $a_{i,j}$ , la matrice  $A$  est notée  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Si  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors la matrice colonne  $V$  est notée  $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $C_j(A)$  la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée des coefficients de la colonne numéro  $j$  de  $A$ . Ainsi :  $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$ .

### Partie I : Un exemple

Soient  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $A_0 = U_0 {}^tV_0$ .

1. Vérifier que 0 est valeur propre de  $A_0$  et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. a) Calculer  $A_0 U_0$ .  
b) Montrer que  $A_0$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .  
c) Déterminer une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  et une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telles que  $A_0 = PDP^{-1}$ .

### Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on appelle trace de  $A$  et on note  $\text{tr}(A)$  la somme des coefficients diagonaux de  $A$ , c'est-à-dire  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .

3. Montrer que l'application  $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , est linéaire.  
$$A \mapsto \text{tr}(A)$$

4. Montrer :  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

5. Vérifier, pour tout  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  $\text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$ .

### Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$  deux matrices colonnes non nulles de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

a) Justifier :  $U^t V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Déterminer les coefficients de  $U^t V$  à l'aide des coefficients de  $U$  et de  $V$ .

b) Exprimer  $\text{tr}(U^t V)$  à l'aide des coefficients de  $U$  et de  $V$ .

c) Quel est le rang de  $U^t V$ .

7. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe  $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$$

b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles  $U$  et  $V$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telles que  $A = U^t V$ .

8. Énoncer une caractérisation des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1.

### Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1. On note  $U$  et  $V$  deux matrices colonnes non nulles de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telles que  $A = U^t V$  et on note  $a = \text{tr}(A)$ .

9. Montrer que 0 est valeur propre de  $A$  et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

10. Montrer :  ${}^t V U = (a)$ , puis :  $A^2 = a A$ .

11. Montrer que si  $a = 0$ , alors  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

12. On suppose  $a \neq 0$ . Calculer  $A U$ . Déduire des questions précédentes que  $A$  est diagonalisable.

13. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1 soit diagonalisable.

## Problème II

- L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service ...) démarré à la date  $t = 0$  et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier des propriétés de la date de première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.
- Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .
- Pour toute variable aléatoire  $Y$ , on notera  $\mathbb{E}(Y)$  son espérance lorsqu'elle existe.
- On adoptera les conventions suivantes :
  - × on dira qu'une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et continue à droite en 0 est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - × en outre, si  $T$  est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+$ , sa fonction de répartition  $F_T(t) = \mathbb{P}([T \leq t]) = \int_0^t f(u) du$ , est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et dérivable à droite en 0.
  - × on conviendra d'écrire  $F_T'(t) = f(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $F_T'(0)$  désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

## I. Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) si elle admet pour densité la fonction  $f_\mu$  définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .
  - a) Donner l'espérance  $\mathbb{E}(X)$  et la variance  $\mathbb{V}(X)$ .
  - b) Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $X^n$  admet une espérance et déterminer une relation de récurrence entre  $\mathbb{E}(X^{n+1})$  et  $\mathbb{E}(X^n)$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - c) En déduire  $\mathbb{E}(X^n)$  pour tout  $n > 0$ .
  - d) Retrouver la valeur de  $\mathbb{V}(X)$  à l'aide de la question précédente.
2. *Propriété caractéristique*
  - a) Soient  $\mu > 0$  et  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . Justifier que pour tout réel  $x$  positif ou nul, le nombre  $\mathbb{P}([X > x])$  est non nul. Montrer que pour tous réels positifs  $x$  et  $y$  :

$$\mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

- b) Réciproquement, soit  $X$  une variable aléatoire positive admettant une densité  $f$  continue et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$ , et telle que pour tous réels positifs  $x$  et  $y$  :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

- (i) Soit  $R(x) = \mathbb{P}([X > x])$ . Justifier que  $R(x)$  est non nul pour tout réel positif.  
 (ii) On pose  $\mu = f(0)$ . Montrer que pour tout  $x$  réel positif, on a la relation  $R'(x) + \mu R(x) = 0$ .  
 (iii) Calculer la dérivée de  $x \mapsto R(x) e^{\mu x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 (iv) Dédire que  $X$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

3. Soient deux réels strictement positifs  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

- a) On pose  $Y = \max(X_1, X_2)$ .  
 Déterminer la fonction de répartition  $F_Y$  de  $Y$  et en déduire la densité de la variable  $Y$ .  
 b) On pose  $Z = \min(X_1, X_2)$ .  
 Déterminer la fonction de répartition  $F_Z$  de  $Z$  et en déduire la loi de  $Z$ .

## II. Fiabilité

Soit  $T$  une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que  $T$  est une variable à densité  $f_T$  continue sur  $\mathbb{R}_+$  et ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On appelle fiabilité de  $T$  la fonction  $R_T$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$R_T(t) = \mathbb{P}([T \geq t]) = \mathbb{P}([T > t]) = 1 - F_T(t)$$

où  $F_T$  est la fonction de répartition de  $T$ .

1. Soient  $t$  un réel positif ou nul et  $h$  un réel strictement positif.  
 La dégradation du système sur l'intervalle  $[t, t+h]$  est mesurée par la probabilité  $\mathbb{P}([t \leq T \leq t+h])$ .  
 Exprimer cette quantité à l'aide de la fonction  $R_T$ .

2. Montrer que, pour tout réel  $t$  positif ou nul,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}([t \leq T \leq t+h])}{h} = f_T(t)$$

- a) Justifier que pour tout réel  $t$  positif,  $R_T(t) > 0$ .

On appelle taux de défaillance la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par le rapport  $\lambda(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}$ .

- b) On note :  $g : t \mapsto \ln \left( \frac{1}{R_T(t)} \right)$ . Démontrer que  $\lambda = g'$ .

- c) Dédire l'expression de  $R_T$  en fonction de  $\lambda$  à l'aide d'une intégrale.

3. Soit  $Z$  une variable aléatoire réelle positive de densité  $g$  continue sur  $\mathbb{R}_+$ , admettant une espérance. On pose  $R_Z(t) = \mathbb{P}([Z > t])$  pour  $t \geq 0$ .

- a) Soit  $v$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $v(t) = tR_Z(t)$ .

Montrer que :  $tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$  où  $v'$  désigne la dérivée de  $v$ .

- b) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ .

- c) En déduire que  $\mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} R_Z(t) dt$ .

4. On suppose désormais que  $T$  admet une espérance. Soit  $t$  un réel positif fixé, le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date  $t$ , on appelle durée de survie la variable aléatoire  $T_t = T - t$  représentant le temps s'écoulant entre la date  $t$  et la première panne.

On a donc, pour tout réel  $x$  positif :

$$R_{T_t}(x) = \mathbb{P}([T_t > x]) = \mathbb{P}_{[T > t]}([T > t + x])$$

a) Montrer que, pour tout réel  $x$  positif :  $R_{T_t}(x) = \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$ .

b) En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u) du$$

Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.

5. a) On suppose que  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .  
 Déterminer la fiabilité et le taux de défaillance.

b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note  $T_i$  la durée de vie de l'organe  $i$ ,  $f_{T_i}$  la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre  $\mu_i$ .  
 Déterminer la fiabilité du système et son taux de défaillance.

c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note  $T_i$  la durée de vie de l'organe  $i$ ,  $f_{T_i}$  la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre  $\mu_i$ .  
 Déterminer la fiabilité du système.

6. Soit  $\varphi_{n,\beta}$  la fonction définie par :

$$\varphi_{n,\beta}(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

où  $\beta > 0$  est une constante strictement positive et  $n$  un entier naturel non nul.

a) Vérifier que  $\varphi_{n,\beta}$  est une densité de probabilité (loi d'Erlang).

b) On suppose que  $T$  a pour densité la fonction  $\varphi_{n,\beta}$ . Montrer que la fiabilité à la date  $t$  est :

$$R_T(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$$

7. Soit  $\psi_{\beta,\eta}$  la fonction définie par :

$$\psi_{\beta,\eta}(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\beta \geq 1, \eta > 0$ .

a) Vérifier que  $\psi_{\beta,\eta}$  est une densité de probabilité (loi de Weibull).

b) On suppose que  $T$  a pour densité la fonction  $\psi_{\beta,\eta}$ .  
 Déterminer la fiabilité  $R_T(t)$  et le taux de défaillance  $\lambda(t)$  à la date  $t$ .

c) Étudier  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t)$  en fonction de la valeur de  $\beta$ .