DS5 (version B)

Problème I (EML S 2013) - 47 points

Si $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\,{}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.

- **1 pt :** $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$
- **1 pt : A_0 non inversible donc 0 est valeur propre de A_0**
- **1 pt : poser le système pour obtenir $E_0(A_0)$**
- **1 pt :** $E_0(A_0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- **0 pt : démontrer la liberté**
- **1 pt : la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_0(A_0)$ (génératrice + libre)**

2. a) Calculer $A_0\,U_0$.

- **1 pt :** $A_0\,U_0 = 1 \cdot U_0$

b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

- **2 pts : la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 4 ($\geqslant 4$ et $\leqslant 4$)** `OU` **la famille $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres.**

c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$, est linéaire.

- 2 pts

4. Montrer : $\forall (A,B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

- 1 pt : formule $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$

- 1 pt : interversion des symboles $\sum$

5. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

- 2 pts

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Justifier : $U\,{}^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les coefficients de $U\,{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.

- 1 pt : $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **et** ${}^tV \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ **donc** $U\,{}^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- 1 pt : $U\,{}^tV = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_{n-1} & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_{n-1} & u_2v_n \\ \vdots & & & & \\ u_{n-1}v_1 & u_{n-1}v_2 & \dots & u_{n-1}v_{n-1} & u_{n-1}v_n \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \dots & u_nv_{n-1} & u_nv_n \end{pmatrix}$

b) Exprimer $\mathrm{tr}(U\,{}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V.

- 1 pt : $\mathrm{tr}\,\big(U\,{}^tV\big) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\, v_i$

c) Quel est le rang de $U\,{}^tV$.

- 1 pt : $\mathrm{rg}\,\big(U\,{}^tV\big) = \mathrm{rg}\,\big(v_{j_0}\, U\big)$ **car** V **non nul**

- 1 pt : $\mathrm{rg}\,\big(U\big) = 1$ **car** U **non nul**

On accorde 1 pt pour $\mathrm{rg}\,\big(U\big) = 1$ **sans justification**

7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j\, C_{j_0}(A)$$

- 2 pts : 1 pt pour procéder par l'absurde et 1 pt pour $\mathrm{rg}(A) \geqslant \mathrm{rg}\,\big(C_k(A), C_\ell(A)\big) = 2$

- 1 pt : $\lambda_j\, C_j(A) + \mu_j\, C_{j_0}(A) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

- 2 pts : $C_j(A) = -\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}\, C_{j_0}(A)$ **car** $\lambda_j \neq 0$ **par l'absurde.**

b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$.

- **1 pt :** $U = C_{j_0}(A)$
- **1 pt :** $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

- **2 pts :** $\mathrm{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow A$ **sécrit sous la forme** $A = U^tV$ **avec** $(U, V) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2$

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$ et on note $a = \mathrm{tr}(A)$.

9. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

- **1 pt :** 0 **est valeur propre de** A **car** A **non inversible**
- **2 pts :** $\dim\big(E_0(A)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) - \mathrm{rg}(A) = n - 1$ **dont 1 pt pour le théorème du rang**

On n'attribue qu'1 pt sur les 2 en cas de confusion d'objets.

10. Montrer : ${}^tV\,U = (a)$, puis : $A^2 = a\,A$.

- **1 pt :** ${}^tV\,U = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\,v_i = (a)$
- **2 pts : pour le reste dont 1 pt pour l'associativité de $\times$:** $\big({}^tU\,V\big)\ \big({}^tU\,V\big) = {}^tU\ \big(V\,{}^tU\big)\ V$

11. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $P(X) = X^2$ **est un polynôme annulateur de** A
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$ **puis** $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ **car** 0 **est valeur propre**
- **1 pt :** $\dim\big(E_0(A)\big) = n - 1 < n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$ **donc** A **n'est pas diagonalisable**

12. On suppose $a \neq 0$. Calculer $A\,U$. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

- **1 pt :** $A\,U = a \cdot U$
- **1 pt :** $P(X) = X^2 - aX = X\,(X - a)$ **est un polynôme annulateur de** A
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, a\}$ **puis** $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$ **car** 0 **est valeur propre et** U **vecteur propre associé à la valeur propre** a
- **1 pt :** $\dim\big(E_0(A)\big) = n - 1 < n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$ **donc** A **n'est pas diagonalisable**
- **1 pt : la famille $\mathcal{G}$ obtenue par concaténation des vecteurs d'une base de** $E_0(A)$ **et de** U **est libre**
- **1 pt : la famille $\mathcal{G}$ est une base de vecteurs propres de** A

13. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

- **2 pts : si** A **une matrice de rang** 1 **:** $\mathrm{tr}(A) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ A$ **n'est pas diagonalisable**

Problème II (ESSEC II 2010) /**92**

- L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service ...) démarré à la date $t = 0$ et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier des propriétés de la date de première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.
- Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.
- On adoptera les conventions suivantes :
  - × on dira qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0 est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  - × en outre, si T est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, sa fonction de répartition $F_T(t) = \mathbb{P}([T \leqslant t]) = \displaystyle\int_0^t f(u)\, du$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et dérivable à droite en 0.
  - × on conviendra d'écrire $F_T'(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F_T'(0)$ désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

I. Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre μ ($\mu > 0$) si elle admet pour densité la fonction f_μ définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu\, \mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre μ.

a) Donner l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\mu}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\mu^2}$

b) Justifier que pour tout entier naturel n, X^n admet une espérance et déterminer une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(X^{n+1})$ et $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout entier naturel n.

- **1 pt : la v.a.r. X admet un moment d'ordre n ssi convergence absolue ce qui revient à la convergence**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_\mu(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^n f_\mu(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^n \mu\, \mathrm{e}^{-\mu t}\, dt$ **car f nulle en dehors de $]0, +\infty[$**
- **1 pt :** $t^n \mu\, \mathrm{e}^{-\mu t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{\mu}{2}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu t}\right)$ **ou autre relation permettant de conclure**
- **1 pt : si le reste du théorème de négligeabilité est énoncé correctement (notamment le caractère positif)**
- **1 pt : IPP effectuée sur un segment**

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^B t^n\,\mu\,\mathrm{e}^{-\mu\,t}\,dt = \frac{\mu}{n+1}\,B^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\mu\,B} + \frac{\mu}{n+1}\,\int_0^B t^{n+1}\,f_\mu(t)\,dt$
- **1 pt : passage à la limite après avoir mentionné la convergence et conclusion** $\mathbb{E}\left(X^{n+1}\right) = \dfrac{n+1}{\mu}\,\mathbb{E}\left(X^n\right)$

c) En déduire $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout $n > 0$.

- **3 pts : démonstration par récurrence** $\mathbb{E}\big(X^n\big) = \dfrac{n!}{\mu^n}$ **ou en itérant la formule précédente (2 pts seulement dans ce cas)**

d) Retrouver la valeur de $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de la question précédente.

- **1 pt : Par KH** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - (\mathbb{E}(X))^2$
- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(X^2\big) = \dfrac{2!}{\mu^2}$

2. Propriété caractéristique

a) Soient $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ.
Justifier que pour tout réel x positif ou nul, le nombre $\mathbb{P}([X > x])$ est non nul.
Montrer que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

- **1 pt : comme** $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $\forall x \geqslant 0$, $\mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) \; = \; \mathrm{e}^{-\mu\,x} > 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X>x]}\big(\,[X > x+y]\,\big) = \dfrac{\mathbb{P}\big(\,[X > x] \cap [X > x+y]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big)}$
- **1 pt :** $[X > x+y] \;\subset\; [X > x]$ **et conclusion** $\mathbb{P}_{[X>x]}\big(\,[X > x+y]\,\big) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mu\,(x+y)}}{\mathrm{e}^{-\mu\,x}} = \mathbb{P}\big(\,[X > y]\,\big)$

b) Réciproquement, soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et telle que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

(i) Soit $R(x) = \mathbb{P}([X > x])$. Justifier que $R(x)$ est non nul pour tout réel positif.

- **1 pt :** $f > 0$ **et continue sur** $[x, +\infty[$
- **1 pt : donc par stricte croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(x < +\infty)$ **:** $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt > 0$

(ii) On pose $\mu = f(0)$. Montrer que pour tout x réel positif, on a la relation $R'(x) + \mu R(x) = 0$.

- **1 pt :** $\forall x \geqslant 0,\; R(x) = 1 - F_X(x)$
- **1 pt :** R **est dérivable sur** $[0, +\infty[$ **car** F **l'est et** $\forall x \geqslant 0,\; R'(x) \; = \; -f_X(x)$
- **1 pt :** $\forall x \geqslant 0,\; \forall y \geqslant 0,\; R(x+y) = R(x) \times R(y)$
- **1 pt :** $\forall x_0 \geqslant 0,\; \forall y \geqslant 0,\; R'(x_0 + y) = \big(-f_X(y)\big) \times R(x_0)$
- **1 pt : en prenant** $y = 0$ **:** $\forall x_0 \geqslant 0,\; R'(x_0) + \mu\,R(x_0) = 0$

(iii) Calculer la dérivée de $x \mapsto R(x)\ \mathrm{e}^{\mu x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt : la fonction $h : x \mapsto R(x)\ \mathrm{e}^{\mu x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt :** $h'(x) = \big(R'(x) + \mu\, R(x)\big)\, \mathrm{e}^{\mu x} = 0$

(iv) Déduire que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

- **1 pt : comme $\forall x \geqslant 0$, $h'(x) = 0$ alors h est constante sur $[0, +\infty[$**
- **2 pts : ainsi** $h(x) = R(x)\, \mathrm{e}^{\mu\, x} = h(0) = R(0)\, \mathrm{e}^{\mu\, 0} = \mathbb{P}\big(\, [X > 0]\,\big) = \mathbb{P}\big(\, [X \geqslant 0]\,\big) = 1$
- **1 pt : comme** $X(\Omega) = [0, +\infty[$, **si** $x < 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}\big(\, [X \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- **1 pt : si** $x \geqslant 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}\big(\, [X \leqslant x]\,\big) = 1 - R(x) = 1 - \mathrm{e}^{\mu\, x}$
- **0 pt : donc** $X \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\mu)$

3. Soient deux réels strictement positifs μ_1 et μ_2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2.

a) On pose $Y = \max(X_1, X_2)$.
Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire la densité de la variable Y.

- **1 pt :** $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x < 0$, $F_Y(x) = \mathbb{P}\big(\, [Y \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- **1 pt : si** $x \geqslant 0$, $F_Y(x) = \mathbb{P}\big(\, [Y \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}\Big(\, [X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x]\,\Big) = \mathbb{P}\big(\, [X_1 \leqslant x]\,\big)\mathbb{P}\big(\, [X_2 \leqslant x]\,\big)$ **car X_2 et X_2 sont indépendantes**
- **1 pt :** $= F_{X_1}(x) \times F_{X_2}(x) = (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1\, x}) \times (1 - \mathrm{e}^{-\mu_2\, x})$ **(car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\mu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\mu_2)$)**
- **1 pt : F_Y est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$**
- **1 pt : F_Y est continue en 0**
- **0 pt : de même F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt : on dérive F_Y sur les intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ avec dérivée sur $]0, +\infty[$:** $f_Y(x) = \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1\, x} - (\mu_1 + \mu_2)\ \mathrm{e}^{-(\mu_1 + \mu_2)\, x} + \mu_2\, \mathrm{e}^{-\mu_2\, x}$

b) On pose $Z = \min(X_1, X_2)$.
Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z et en déduire la loi de Z.

- **1 pt :** $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x < 0$, $F_Z(x) = \mathbb{P}\big(\, [Z \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- **1 pt : si** $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}\big(\, [Z > x]\,\big) = \mathbb{P}\Big(\, [X_1 > x] \cap [X_2 > x]\,\Big) = \mathbb{P}\big(\, [X_1 > x]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\, [X_2 > x]\,\big) = \mathrm{e}^{-\mu_1\, x} \times \mathrm{e}^{-\mu_2\, x} = \mathrm{e}^{-(\mu_1 + \mu_2)\, x}$
- **1 pt :** $Z \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\mu_1 + \mu_2)$

II. Fiabilité /76

Soit T une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que T est une variable à densité f_T continue sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
On appelle fiabilité de T la fonction R_T définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$R_T(t) = \mathbb{P}([T \geqslant t]) = \mathbb{P}([T > t]) = 1 - F_T(t)$$

où F_T est la fonction de répartition de T.

4. Soient t un réel positif ou nul et h un réel strictement positif.
La dégradation du système sur l'intervalle $[t, t+h]$ est mesurée par la probabilité $\mathbb{P}([t \leqslant T \leqslant t+h])$.
Exprimer cette quantité à l'aide de la fonction R_T.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[t \leqslant T \leqslant t+h]\,\big) = R_T(t) - R_T(t+h)$

5. Montrer que, pour tout réel t positif ou nul,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}([t \leqslant T \leqslant t+h])}{h} = f_T(t)$$

- **1 pt : La fonction f_T est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction F_T, qui est une primitive de f_T, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $R_T : t \mapsto 1 - F_T(t)$, la fonction R_T est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, en particulier en t.**
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{R_T(t+h) - R_T(t)}{h} \;=\; R_T'(t) \;=\; -F_T'(t) \;=\; -f_T(t)$

6. a) Justifier que pour tout réel t positif, $R_T(t) > 0$.
On appelle taux de défaillance la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par le rapport $\lambda(t) = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)}$.

- **1 pt :** $R_T'(t) = -f_T(t) < 0$
- **1 pt : la fonction R_T est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.**
- **2 pts :** $R_T\big([0, +\infty[\big) \;=\; \left]\displaystyle\lim_{t \to +\infty} R_T(t), R_T(0)\right] \;=\;]0, 1]$
  × **1 pt :** $R_T(0) = 1$
  × **1 pt :** $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} R_T(t) = 0$

b) On note : $g : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{R_T(t)}\right)$. Démontrer que $\lambda = g'$.

- **1 pt : la fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ car elle est la composée...**
- **1 pt :** $g' = \lambda$

c) Déduire l'expression de R_T en fonction de λ à l'aide d'une intégrale.

- **1 pt : g est une primitive de λ**
- **1 pt : g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction λ est continue sur $\mathbb{R}_+$.**
- **1 pt : considérons par exemple la primitive H de λ qui s'annule en 0. Plus précisément :** $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad H(x) \;=\; \displaystyle\int_0^x \lambda(t)\ dt$
- **1 pt : La fonction g recherchée coïncide avec H à une constante près. Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :** $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = H(x) + c$.

- **1 pt :** $H(x) = g(x) - g(0)$
- **1 pt :** $g(0) = 0$
- **1 pt :** $R_T(x) = \exp\left(-\displaystyle\int_0^x \lambda(t)\ dt\right)$

7. Soit Z une variable aléatoire réelle positive de densité g continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une espérance. On pose $R_Z(t) = \mathbb{P}([Z > t])$ pour $t \geqslant 0$.

a) Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v(t) = tR_Z(t)$.
Démontrer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$ où v' désigne la dérivée de v.

- **1 pt :** v **dérivable sur** $\mathbb{R}_+$
- **1 pt :** $v'(t) = R_Z(t) - t\,g(t)$

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.

- **1 pt :** $v(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx$
- **1 pt :** $v(t) \geqslant 0$
- **1 pt :** $0 \leqslant t\,g(x) \leqslant x\,g(x)$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :** $\displaystyle\int_t^B t\,g(x)\ dx \leqslant \int_t^B x\,g(x)\ dx$
- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx$ **est convergente.**
- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx$ **est convergente, car** Z **admet une espérance**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

c) En déduire que $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} R_Z(t)\ dt$.

- **1 pt : comme** Z **est à valeurs positives, sa densité** g **est nulle en dehors de** $[0, +\infty[$**.**
Ainsi : $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,g(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t\,g(t)\ dt$
- **1 pt : d'après *7.a)* :** $\displaystyle\int_0^B t\,g(t)\ dt = \int_0^B R_Z(t)\ dt - \int_0^B v'(t)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^B v'(t)\ dt = v(B)$
- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,g(t)\ dt$ **est convergente et vaut** $\mathbb{E}(Z)$
- **1 pt : d'après la question précédente :** $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} v(B) = 0$

8. On suppose désormais que T admet une espérance. Soit t un réel positif fixé, le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire $T_t = T - t$ représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne.
On a donc, pour tout réel x positif :

$$R_{T_t}(x) = \mathbb{P}([T_t > x]) = \mathbb{P}_{[T>t]}([T > t + x])$$

a) Démontrer, pour tout réel x positif : $R_{T_t}(x) = \dfrac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$.

- **1 pt :** $R_{T_t}(x) = \dfrac{\mathbb{P}\big([T > t+x] \cap [T > t]\big)}{\mathbb{P}\big([T > t]\big)}$
- **1 pt :** $[T > t + x] \subset [T > t]$ **(car** $x \geqslant 0$**)**

b) En déduire :

$$\mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)\ du$$

- **4 pts : on est bien dans le cadre de la question *7.* pour la v.a.r.** T_t
  - × **1 pt :** T_t **est à valeurs positives,**
  - × **1 pt :** T_t **est une v.a.r. à densité de densité** $g_t : x \mapsto f_T(x+t)$
  - × **1 pt :** g_t **est continue sur** $\mathbb{R}_+$ **car elle est la composée...**
  - × **1 pt :** T_t **admet une espérance**
- **1 pt : application de *7.* :** $\mathbb{E}(T_t) = \dfrac{1}{R_T(t)} \displaystyle\int_0^{+\infty} R_T(t+x)\ dx$
- **1 pt : avec le changement de variable** $u = t + x$ **:** $\mathbb{E}(T_t) = \dfrac{1}{R_T(t)} \displaystyle\int_t^{+\infty} R_T(u)\ du$

Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.

9. a) On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre μ.
Déterminer la fiabilité et le taux de défaillance.

- **1 pt :** $F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\mu x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
- **1 pt :** $f_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ \mu\, \mathrm{e}^{-\mu x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
- **1 pt :** $R_T : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mu x}$
- **1 pt :** $\lambda_T : x \mapsto \mu$

b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
Déterminer la fiabilité du système et son taux de défaillance.

- **1 pt :** $Z = \min(X_1, X_2)$
- **1 pt : d'après *3.b)* :** $Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\mu_1 + \mu_2\right)$
- **1 pt :** $R_Z : x \mapsto \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\, x}$
- **1 pt :** $\lambda_Z : x \mapsto \mu_1 + \mu_2$

c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
Déterminer la fiabilité du système.

- **1 pt :** $Z = \max(X_1, X_2)$
- **1 pt : d'après *3.a)*, Y est une v.a.r. à densité et :** $F_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x})(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}) & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$
- **1 pt :** $R_Y : x \mapsto 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x})(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x})$

10. Soit $\varphi_{n,\beta}$ la fonction définie par :

$$\varphi_{n,\beta} : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\beta}{(n-1)!}\ (\beta t)^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\beta t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

où $\beta > 0$ est une constante strictement positive et n un entier naturel non nul.

a) Démontrer que $\varphi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité (loi d'Erlang).

- **1 pt : la fonction $\varphi_{n,\beta}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_{n,\beta}(x) \geqslant 0$**
- **6 pts : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$ est convergente et vaut 1.**
  - × **1 pt : comme $\varphi_{n,\beta}$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$**
  - × **1 pt : La fonction $\varphi_{n,\beta}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.**
  - × **4 pts : récurrence**
    - **1 pt : initialisation**
    - **3 pts : hérédité (1 pt pour IPP, 1 pt pour calcul, 1 pt pour limites)**

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\varphi_{n,\beta}$. Montrer que la fiabilité à la date t est :

$$R_T(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$$

- **1 pt : R_T est la primitive de $-\varphi_{n,\beta}$ qui admet pour limite 0 en $+\infty$. On note $G : t \mapsto \mathrm{e}^{-\beta\, t} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta\, t)^k}{k!}$. Vérifions : $G = R_T$.**
- **1 pt : G dérivable sur $\mathbb{R}_+$**
- **2 pts : $G' = -\varphi_{n,\beta}$**
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} G(t) = 0$ par croissances comparées**

11. Soit $\psi_{\beta,\eta}$ la fonction définie par :

$$\psi_{\beta,\eta} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\beta \geqslant 1, \eta > 0$.

a) Vérifier que $\psi_{\beta,\eta}$ est une densité de probabilité (loi de Weibull).

- **1 pt : La fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.**
- **1 pt : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi_{\beta,\eta}(t) \geqslant 0$**
- **3 pts : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\ dt$ converge et vaut 1**

× **1 pt : comme la fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\ dt$**

× **1 pt : la fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\ dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.**

× **1 pt : $\displaystyle\int_{0}^{B} \psi_{\beta,\eta}(t)\ dt = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{B}{\eta}\right)^{\beta}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (car $\beta > 0$)**

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\psi_{\beta,\eta}$.
Déterminer la fiabilité $R_T(t)$ et le taux de défaillance $\lambda(t)$ à la date t.

- **1 pt : on considère : $T(\Omega) = [0,+\infty[$**
- **3 pts : $F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$**

  × **1 pt : cas $x < 0$**

  × **2 pts : cas $x \geqslant 0$**
- **1 pt : $R_T : x \mapsto \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}}$**
- **1 pt : $\lambda : t \mapsto \dfrac{\beta}{\eta}\left(\dfrac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$**

c) Étudier $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \lambda(t)$ en fonction de la valeur de β.

- **1 pt : si $\beta = 1$, alors : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = \frac{1}{\eta}$**
- **1 pt : si $\beta > 1$, comme $\eta > 0$, alors : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = +\infty$**