DS5 (version B)

Problème I (EML S 2013)

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.
Si $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tV$ désigne la matrice transposée de V.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est notée $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Si $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A_0 = U_0 {}^tV_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.
- La matrice A_0 possède deux colonnes colinéaires ($C_2 = -C_1$ par exemple).
  Ainsi, A_0 est non inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est valeur propre de } A_0.}$$

Commentaire

Étant donnée la construction de A_0, déterminer le rang de cette matrice s'avère très simple :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 1 \end{aligned}$$

En effet, la dernière famille considérée est libre car constituait uniquement d'un vecteur non nul (rappelons que si $\mathcal{F}$ est libre : $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$.

- Déterminons $E_0(A_0)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_0(A_0) & \Longleftrightarrow & A_0\ X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 4z & - & 2t & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & 6z & - & 3t & = & 0 \\ 4x & - & 4y & + & 8z & - & 4t & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \ x = y - 2z + t \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_0(A_0) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x = y - 2z + t \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} y - 2z + t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_0(A_0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(*)$. Or :

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est :
  × génératrice de $E_0(A_0)$,
  × libre.

$$\boxed{\text{On en conclut que } \mathcal{F} \text{ est une base de } E_0(A_0).}$$

Commentaire

- Considérons l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la représentation dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A_0. Par le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathbb{R}^4\big) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 4 & & \dim\big(E_0(f)\big) & & \mathrm{rg}(f) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(E_0(A_0)\big) & + & \mathrm{rg}(A_0) \end{array}$$

  Profitons-en pour rappeler que l'écriture $\mathrm{Ker}(A_0)$ est impropre car A_0 est une matrice, pas une application linéaire.
- Cette égalité permet de démontrer :

$$\dim\big(E_0(A_0)\big) \ = \ \dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big) - \mathrm{rg}(A_0) \ = \ 4 - 1 \ = \ 3$$

  On pouvait utiliser cet argument à la place de l'argument de liberté de la famille $\mathcal{F}$.

□

2. a) Calculer $A_0\, U_0$.

Démonstration.

$$A_0\, U_0 \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A_0\, U_0 = 1 \cdot U_0.}$$

□

b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, U_0 est un vecteur popre de A_0 associé à la valeur propre 1.
- La famille $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est :
  - × libre en tant que concaténation de deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
  - × telle que : $\text{Card}\big(\mathcal{G}\big) = 4 = \dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big)$.

  On en déduit que la famille $\mathcal{G}$ est une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Comme } \mathcal{G} \text{ est une base de vecteurs propres de } A\text{, la matrice } A_0 \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la diagonalisabilité par un argument de dimension.

- D'après la question ***1.*** : $\dim\big(E_0(A_0)\big) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 3$.
- D'après la question précédente, U_0 est un vecteur popre de A_0 associé à la valeur propre 7. On en déduit : $\dim\big(E_1(A_0)\big) \geqslant 1$.
- Ainsi :
$$\dim\big(E_0(A_0)\big) + \dim\big(E_1(A_0)\big) \geqslant 3 + 1 = 4$$
  Et comme $\dim\big(E_0(A_0)\big) + \dim\big(E_1(A_0)\big) \leqslant 4$, on en conclut :
$$\dim\big(E_0(A_0)\big) + \dim\big(E_1(A_0)\big) = 4 = \dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big)$$
  Ainsi, la matrice A_0 est diagonalisable.

□

c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Démonstration.
La matrice A_0 est diagonalisable.
Il existe donc une matrice inversible P et une matrice D diagonale telles que :

$$A_0 = PDP^{-1}$$

Plus précisément :

- × la matrice $P \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A_0.
- × la matrice $D \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de A_0 (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

$$\boxed{\text{Ainsi : } A_0 = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$, est linéaire.

Démonstration.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B = \big(b_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord, par définition de la somme de matrices : $\lambda A + \mu B = \big(\lambda\, a_{i,j} + \mu\, b_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
- Par définition de la trace :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{tr}\left(\lambda A + \mu B\right) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\lambda A + \mu B\right)_{i,i} & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\lambda\, a_{i,i} + \mu\, b_{i,i}\right) & \\ & = & \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,i} & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ & = & \lambda\ \mathrm{tr}(A) + \mu\ \mathrm{tr}(B) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application tr est bien linéaire.}}$$

□

4. Montrer : $\forall (A,B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Démonstration.
On note $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et soit $B = \big(b_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
De plus, on note : $C = AB = \big(c_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $D = BA = \big(d_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $j \in [\![1, n]\!]$. Par définition du produit matriciel :

$$c_{i,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j} \qquad \text{et} \qquad d_{i,j} = (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}(AB) \ = \ tr(C) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i,i} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} \right) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} d_{k,k} \right) \ = \ \mathrm{tr}(D) \ = \ \mathrm{tr}(BA) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).}$$

Commentaire

On a rappelé en début d'exercice la formule permettant d'obtenir les coefficients de la matrice produit AB. Cette formule ne revêt pas de difficulté. Elle exprime le fait que que le coefficient en position (i, j) de la matrice AB est obtenu en réalisant le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B.

$$c_{i,j} \ = \ (AB)_{i,j} \ = \ \begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} \ = \ \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$$

$\square$

5. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

Démonstration.
Notons $B = {}^tA$. Rappelons : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $b_{i,j} = a_{j,i}$.
En reprenant la démonstration précédente :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left({}^tAA\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\, a_{i,k} \right) \qquad \textit{(car } B = {}^tA\textit{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \operatorname{tr}\left({}^tAA\right) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \right).}$$

Commentaire

Les variables de sommation sont des variables muettes. On peut donc les renommer sans changer le résultat énoncé. Si on souhaite retrouver la même présentation que celle présente dans l'énoncé, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \ = \ \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\beta,\alpha}^2 \right) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \right)$$

$\square$

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Justifier : $U\,{}^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les coefficients de $U\,{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tV \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } U\,{}^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

- D'autre part :

$$U\,{}^tV \;=\; \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_{n-1} & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_{n-1} & u_2v_n \\ \vdots & & & & \\ u_{n-1}v_1 & u_{n-1}v_2 & \dots & u_{n-1}v_{n-1} & u_{n-1}v_n \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \dots & u_nv_{n-1} & u_nv_n \end{pmatrix} \;=\; (u_i\,v_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

$$\boxed{U\,{}^tV = (u_i\,v_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}}$$

□

b) Exprimer $\mathrm{tr}\left(U\,{}^tV\right)$ à l'aide des coefficients de U et de V.

Démonstration.
Notons $A = U\,{}^tV$. D'après la question précédente, et par définition de l'opérateur tr :

$$\mathrm{tr}\left(U\,{}^tV\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} \;=\; \sum_{i=1}^{n} u_i\,v_i$$

$$\boxed{\mathrm{tr}\left(U\,{}^tV\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i\,v_i}$$

Commentaire

On ne peut `EN AUCUN CAS` utiliser le résultat de la question ***4***. La raison en est simple : U et V sont des matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et non de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Rappelons, à toutes fins utiles, que le résultat d'une question ne peut être utilisé que si l'on se trouve dans le cadre d'application de ce résultat. Il convient donc de vérifier que les objets manipulés vérifient les propriétés nécessaires.

□

c) Quel est le rang de $U\,{}^tV$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)*** :

$$U\,{}^tV \;=\; \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_{n-1} & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_{n-1} & u_2v_n \\ \vdots & & & & \\ u_{n-1}v_1 & u_{n-1}v_2 & \dots & u_{n-1}v_{n-1} & u_{n-1}v_n \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \dots & u_nv_{n-1} & u_nv_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(v_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad v_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad \dots \quad v_{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad v_n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \right) \;=\; \begin{pmatrix} v_1\,U & \dots & v_n\,U \end{pmatrix}$$

- Par hypothèse, la matrice V est non nulle.
  Ainsi, V admet (au moins) un coefficient non nul. Notons le v_{j_0} (avec $j_0 \in [\![1, n]\!]$).

$$\begin{array}{rcll} \text{rg}\left(U\,{}^tV\right) & = & \text{rg}\left(v_1\,U,\ \ldots,\ v_n\,U\right) & \\ & = & \text{rg}\left(v_{j_0}U\right) & \\ & = & \text{rg}\left(U\right) & \textit{(car } v_{j_0} \neq 0\textit{)} \end{array}$$

  Or, la famille (U) est libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{On en déduit : rg}\left(U^tV\right) = \text{rg}\left(U\right) = 1.}$$

□

7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j\, C_{j_0}(A)$$

Démonstration.

- On procède par l'absurde.
  Supposons que le matrice A possède deux colonnes non colinéaires.
  Notons $k \in [\![1, n]\!]$ et $\ell \in [\![1, n]\!]$ les numéros respectifs de ces deux colonnes. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(A) & = & \text{rg}\left(C_1(A), \ldots, C_n(A)\right) \\ & \geqslant & \text{rg}\left(C_k(A), C_\ell(A)\right) \ = \ 2 \end{array}$$

  En effet, la famille $(C_k(A), C_\ell(A))$ est libre car constitué de deux vecteurs non colinéaires.
  Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que toute famille de deux colonnes de } A \text{ est liée.}}$$

- La matrice A étant de rang 1 elle admet une colonne non nulle (sinon, en procédant par l'absurde, on démontre qu'elle est nulle et donc de rang 0).
  Notons j_0 le numéro de cette colonne non nulle.
  Soit $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{j_0\}$. D'après le point précédente, la famille $\left(C_j(A), C_{j_0}(A)\right)$ est liée.
  Autrement dit, il existe $(\lambda_j, \mu_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ tel que :

$$\begin{array}{rl} & \lambda_j\, C_j(A) + \mu_j\, C_{j_0}(A) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ \text{ainsi :} & \lambda_j\, C_j(A) = -\mu_j\, C_{j_0}(A) \\ \text{et :} & C_j(A) = \underbrace{-\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}}_{\alpha_j}\, C_{j_0}(A) \end{array}$$

  Notons que cette dernière écriture est valide car $\lambda_j \neq 0$. On le démontre par l'absurde.
  Supposons $\lambda_j = 0$. Dans ce cas : $\mu_j\, C_{j_0}(A) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
  Or, comme $C_{j_0}(A) \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, on en déduit : $\mu_j = 0$.
  Ainsi $(\alpha_j, \mu_j) = (0, 0)$. Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } j \in [\![1, n]\!], \text{ il existe } \alpha_j \in \mathbb{R},\ C_j(A) = \alpha_j\ C_{j_0}(A).}$$

□

b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} A & = & \begin{pmatrix} \alpha_1\, C_{j_0}(A) & \dots & \alpha_n\, C_{j_0}(A) \end{pmatrix} \\ & = & C_{j_0}(A) \times \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \end{array}$$

*(en remontant les calculs en **6.c)**)*

$$\boxed{\text{Ainsi : } A = U\,{}^tV \text{ avec } U = C_{j_0}(A) \text{ et } V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.}$$

□

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Démonstration.

- D'après la question ***6.c)*** :

$$\begin{array}{l} A \text{ sécrit sous la forme } A = U\,{}^tV \\ \text{avec } (U,V) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = 1$$

- D'après la question ***7.b)*** :

$$\mathrm{rg}(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A \text{ sécrit sous la forme } A = U\,{}^tV \\ \text{avec } (U,V) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ \mathrm{rg}(A) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} A \text{ sécrit sous la forme } A = U\,{}^tV \\ \text{avec } (U,V) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \end{array} .}$$

□

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$ et on note $a = \mathrm{tr}(A)$.

9. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

Démonstration.

- D'après l'énoncé :

$$\mathrm{rg}(A) = 1 < n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$$

On en conclut que la matrice A n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Ainsi, 0 est valeur propre de } A.}$$

- Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la représentation dans la base $\mathscr{B}$ est A. Par le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathbb{R}^n\big) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ n & & \dim\big(E_0(f)\big) & & \mathrm{rg}(f) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(E_0(A)\big) & + & \mathrm{rg}(A) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_0(A)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) - \mathrm{rg}(A) = n - 1.}$$

□

10. Montrer : ${}^tV\,U = (a)$, puis : $A^2 = a\,A$.

Démonstration.
On reprend les notations de la **Partie III**.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} {}^tV\,U & = & (v_1 \quad \dots \quad v_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\, v_i & \\ & = & \mathrm{tr}\left({}^tU\,V\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & \mathrm{tr}(A) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } {}^tV\,U = (a).}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcll} A^2 & = & \left({}^tU\,V\right)^2 & \\ & = & \left({}^tU\,V\right)\,\left({}^tU\,V\right) & \\ & = & {}^tU\,\left(V\,{}^tU\right)\,V & \\ & = & a\,{}^tU\,V & \textit{(car } V\,{}^tU = a\textit{)} \\ & = & a\,A & \end{array}$$

$$\boxed{A^2 = a\,A}$$

□

11. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Supposons $a = 0$. D'après la question précédente :

$$A^2 \ = \ 0\,A \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

- On en déduit que $P(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{0\}$$

  Autrement dit, le réel 0 est la seule valeur propre possible de la matrice A.
  Or, d'après la question ***9.***, le réel 0 est bien valeur propre de A.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(A) = \{0\}.}$$

- Enfin, toujours d'après la question ***9.*** :

$$\dim\left(E_0(A)\right) = n - 1 < n = \dim\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que si } a = 0, \text{ la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

12. On suppose $a \neq 0$. Calculer $A\,U$. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

Démonstration.

- D'après la question ***10.*** :
$$A^2 - a\,A \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
On en déduit que $P(X) = X^2 - a\,X = X\,(X-a)$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi :
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{0, a\}$$
- Par ailleurs :
$$A\,U \;=\; \big(U\,{}^tV\big)\,U \;=\; U\big({}^tV\,U\big) \;=\; a\,U$$
On en déduit que a est valeur propre de A.
$$\boxed{\text{Comme de plus } 0 \text{ est bien valeur propre de } A\text{, on a : } \mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}.}$$
- Considérons alors la famille $\mathcal{G}$ obtenue par concaténation des vecteurs d'une base de $E_0(A)$ et de U. Cette famille est :
  - × libre en tant que concaténation de deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
  - × telle que : $\mathrm{Card}\big(\mathcal{G}\big) = (n-1)+1 = n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$.

  On en déduit que la famille $\mathcal{G}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$\boxed{\text{Comme } \mathcal{G} \text{ est une base de vecteurs propres de } A\text{, la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$
□

13. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Démonstration.
Considérons A une matrice de rang 1.

- D'après la question ***12.*** :
$$\mathrm{tr}(A) \neq 0 \quad\Rightarrow\quad A \text{ est diagonalisable}$$
- D'après la question ***11.*** :
$$\mathrm{tr}(A) \neq 0 \quad\Leftarrow\quad A \text{ est diagonalisable}$$
En effet, par contraposée on démontre : $\mathrm{tr}(A) \neq 0 \;\Rightarrow\; A$ n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } A \text{ une matrice de rang 1 : } \mathrm{tr}(A) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$
□

Problème II (ESSEC II 2010)

- L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service ...) démarré à la date $t = 0$ et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier des propriétés de la date de première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.
- Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.
- On adoptera les conventions suivantes :
  - × on dira qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0 est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  - × en outre, si T est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, sa fonction de répartition $F_T(t) = \mathbb{P}([T \leqslant t]) = \displaystyle\int_0^t f(u)\, du$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et dérivable à droite en 0.
  - × on conviendra d'écrire $F_T'(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F_T'(0)$ désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

I. Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre μ ($\mu > 0$) si elle admet pour densité la fonction f_μ définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu\, \mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre μ.

a) Donner l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, alors X admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\mu} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\mu^2}.}$$

Commentaire

- Une bonne connaissance du cours est une condition sine qua non de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. C'est particulièrement le cas dans cet énoncé où les propriétés caractéristiques de la loi exponentielle sont étudiées.
- Profitons-en pour rappeler que la connaissance de l'espérance et de la variance permet d'obtenir le moment d'ordre 2. En effet, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ \text{donc} & \mathbb{E}\big(X^2\big) & = & \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \end{array}$$

□

b) Justifier que pour tout entier naturel n, X^n admet une espérance et déterminer une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(X^{n+1})$ et $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout entier naturel n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  La v.a.r. X admet un moment d'ordre n si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \, f_\mu(t) \, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \, f_X(t) \, dt$.
- Tout d'abord, comme la fonction f_μ est nulle en dehors de $]0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \, f_\mu(t) \, dt \; = \; \int_{0}^{+\infty} t^n \, f_\mu(t) \, dt \; = \; \int_{0}^{+\infty} t^n \, \mu \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \, dt$$
- De plus, la fonction $t \mapsto t^n \, f_\mu(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^n \, f_\mu(t) \, dt$ est donc impropre seulement en $+\infty$.
- On a :
  × $\forall t \in \; [0, +\infty[, \;\; t^n \, \mu \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \geqslant 0 \quad$ et $\quad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,\mu\, t} \geqslant 0$.
  × $t^n \, \mu \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \; \underset{t \to +\infty}{=} \; o\left(\dfrac{\mu}{2} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,\mu\, t}\right)$. En effet :
$$\frac{t^n \, \cancel{\mu} \, \mathrm{e}^{-\mu\, t}}{\frac{\cancel{\mu}}{2} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,\mu\, t}} \; = \; 2 \, \frac{t^n}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,\mu\, t}} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$
  × l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mu}{2} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,\mu\, t} \, dt$ est convergente en tant que moment d'ordre 0 d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}\left(\frac{\mu}{2}\right)$.
  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^n \, f_\mu(t) \, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre } n.}$$

- Soit $B \in [0, +\infty[$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\int_{0}^{B} t^n \, f_\mu(t) \, dt \; = \; \int_{0}^{B} t^n \, \mu \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \, dt$$
  On procède alors par intégration par parties (IPP).
$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \mathrm{e}^{-\mu\, t} & \quad & u'(t) & = & -\mu \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \\ v'(t) & = & \mu \, t^n & \quad & v(t) & = & \dfrac{\mu}{n+1} \, t^{n+1} \end{array} \right.$$
  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0, B]$.
  On obtient :
$$\begin{aligned} \int_{0}^{B} t^n \, \mu \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \, dt \; &= \; \left[\frac{\mu}{n+1} \, t^{n+1} \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \right]_0^B - \int_{0}^{B} \frac{-1}{n+1} \, \big(-\mu \, t^{n+1} \big) \, \mu \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \, dt \\ &= \; \frac{\mu}{n+1} \, \left[\, t^{n+1} \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \, \right]_0^B + \frac{\mu}{n+1} \int_{0}^{B} t^{n+1} \, \mu \, \mathrm{e}^{-\mu\, t} \, dt \\ &= \; \frac{\mu}{n+1} \, B^{n+1} \, \mathrm{e}^{-\mu\, B} + \frac{\mu}{n+1} \int_{0}^{B} t^{n+1} \, f_\mu(t) \, dt \qquad (*) \end{aligned}$$

- Or :
  × $\dfrac{\mu}{n+1} B^{n+1} \, \mathrm{e}^{-\mu B} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
  × l' intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \, f_\mu(t) \, dt$ (respectivement $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1} \, f_\mu(t) \, dt$) est convergente car, la v.a.r. X admet un moment d'ordre n (respetivement $n+1$).
  Ainsi, la quantité $\displaystyle\int_0^{B} t^n \, f_\mu(t) \, dt$ (respectivement $\displaystyle\int_0^{B} t^{n+1} \, f_\mu(t) \, dt$) admet une limite finie lorsque B tend vers $+\infty$.

  Par passage à la limite (quand B tend vers $+\infty$) dans l'égalité $(*)$, on obtient alors :

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} t^n \, f_\mu(t) \, dt}_{= \, \mathbb{E}(X^n)} \quad = \quad 0 + \underbrace{\frac{\mu}{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} \, f_\mu(t) \, dt}_{= \, \frac{\mu}{n+1} \mathbb{E}\left(X^{n+1}\right)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{E}\left(X^{n+1}\right) = \frac{n+1}{\mu} \, \mathbb{E}\left(X^n\right)}$$

Commentaire

- Il n'était pas obligatoire de commencer par faire une démonstration de convergence à l'aide d'un théorème de comparaison. Il était aussi possible de procéder par récurrence. L'idée est alors de démontrer que l'existence du moment d'ordre n permet de démontrer l'existence d'ordre $n+1$. Toutefois, ce raisonnement est plus subtil car il nécessite d'expliciter la relation entre $\mathbb{E}\big(X^n\big)$ et $\mathbb{E}\big(X^{n-1}\big)$ avant de la démontrer.
- Plus précisément, on pouvait démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n)$: la v.a.r. X admet un moment d'ordre n et $\mathbb{E}\big(X^n\big) = \dfrac{n}{\mu} \, \mathbb{E}\big(X^{n-1}\big)$.

□

c) En déduire $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout $n > 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}\left(X^m\right) = \dfrac{m}{\mu} \, \mathbb{E}\left(X^{m-1}\right)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}\left(X^n\right) & = & \dfrac{n}{\mu} \, \mathbb{E}\left(X^{n-1}\right) & \textit{(en appliquant la relation en } m = n\textit{)} \\[2ex]
& = & \dfrac{n}{\mu} \times \left(\dfrac{n-1}{\mu} \, \mathbb{E}\left(X^{n-2}\right) \right) & \textit{(en appliquant la relation en } m = n-1\textit{)} \\[2ex]
& = & \dfrac{n}{\mu} \times \dfrac{n-1}{\mu} \left(\dfrac{n-2}{\mu} \, \mathbb{E}\left(X^{n-3}\right) \right) & \textit{(en appliquant la relation en } m = n-2\textit{)} \\[2ex]
& & \dots & \dots \\[2ex]
& = & \dfrac{n}{\mu} \times \dfrac{n-1}{\mu} \times \dots \times \dfrac{n-(n-1)}{\mu} \, \mathbb{E}\left(X^{n-n}\right) & \textit{(en appliquant la relation en } m = 1\textit{)} \\[2ex]
& = & \dfrac{n!}{\mu^n} \, \mathbb{E}\big(X^0\big) \ = \ \dfrac{n!}{\mu^n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}\big(X^n\big) = \frac{n!}{\mu^n}}$$

□

d) Retrouver la valeur de $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de la question précédente.

Démonstration.
D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\big(X^2\big) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{2!}{\mu^2} - \left(\frac{1!}{\mu}\right)^2 && \textit{(en appliquant la formule de la question précédente en } n=1 \textit{ et } n=2\textit{)} \\ &= \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on retrouve bien : } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\mu^2}.}$$

□

2. *Propriété caractéristique*

a) Soient $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ.
Justifier que pour tout réel x positif ou nul, le nombre $\mathbb{P}([X > x])$ est non nul.
Montrer que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}\big(\,[X > x+y]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X > y]\,\big)$$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$ et soit $y \geqslant 0$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) &= 1 - \mathbb{P}\big(\,[X \leqslant x]\,\big) \\ &= 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\mu\, x}) \\ &= \mathrm{e}^{-\mu\, x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) \ = \ \mathrm{e}^{-\mu\, x} > 0}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X>x]}\big(\,[X > x+y]\,\big) &= \frac{\mathbb{P}\big(\,[X > x] \cap [X > x+y]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big)} && \textit{(par définition et car } \mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) > 0\textit{)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\big(\,[X > x+y]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big)} && \textit{(car } [X > x+y] \subset [X > x]\textit{)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\mu\,(x+y)}}{\mathrm{e}^{-\mu\, x}} && \textit{(d'après le point précédent appliqué en } x \geqslant 0 \textit{ et } x+y \geqslant 0\textit{)} \\ &= \frac{\cancel{\mathrm{e}^{-\mu\, x}}\ \mathrm{e}^{-\mu\, y}}{\cancel{\mathrm{e}^{-\mu\, x}}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0,\ \mathbb{P}_{[X>x]}\big(\,[X > x+y]\,\big) = \mathrm{e}^{-\mu\, y} = \mathbb{P}\big(\,[X > y]\,\big).}$$

□

b) Réciproquement, soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et telle que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}\big([X > x+y]\big) = \mathbb{P}\big([X > y]\big)$$

(i) Soit $R(x) = \mathbb{P}([X > x])$. Justifier que $R(x)$ est non nul pour tout réel positif.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

- Par définition :

$$\mathbb{P}\big([X > x]\big) = \int_x^{+\infty} f(t)\ dt$$

- Or, d'après l'énoncé :
  - × $\forall t \in [0, +\infty[,\ f(t) > 0$,
  - × la fonction f est continue sur $[x, +\infty[$.

Ainsi, par stricte croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x < +\infty$), on en déduit :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\ dt > 0$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ R(x) = \mathbb{P}\big([X > x]\big) > 0}$$

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer que, comme X est une v.a.r. à densité, et que f est continue sur $[0, +\infty[$, alors F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$:

$$F_X'(x) = f(x) > 0 \quad \textit{(par hypothèse de l'énoncé)}$$

- La fonction F_X est :

× continue sur $[0, +\infty[$,

× strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur :

$$F_X\big([0, +\infty[\big) = [F_X(0), \lim_{x\to+\infty} F_X(x)[= [F_X(0), 1[$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, +\infty[$: $F_X(x) < 1$.

$$\begin{array}{rrcl} \text{On en déduit} & -F_X(x) & > & -1 \\ \text{donc} & \underbrace{1 - F_X(x)}_{=\ \mathbb{P}([X > x])} & > & 0 \end{array}$$

□

(ii) On pose $\mu = f(0)$. Montrer que pour tout x réel positif, on a la relation $R'(x) + \mu R(x) = 0$.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord que pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{rcl} F_X(x) & = & \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\ & = & 1 - \mathbb{P}\big([X > x]\big) \\ & = & 1 - R(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \geqslant 0,\ R(x) = 1 - F_X(x).}$$

- On sait que :
  - × la v.a.r. X est une v.a.r. à densité,
  - × la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

  On en déduit que la fonction F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. D'après l'égalité précédente, il en est de même de la fonction R.

$$\boxed{\text{On a alors : } \forall x \geqslant 0,\ R'(x) \ = \ -f_X(x).}$$

- Par hypothèse de l'énoncé, pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $y \geqslant 0$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{[X>x]}\big([X > x+y]\big) & = & \mathbb{P}\big([X > y]\big) \\ \shortparallel & & \\ \dfrac{\mathbb{P}\big([X > x] \cap [X > x+y]\big)}{\mathbb{P}\big([X > x]\big)} & = & \dfrac{\mathbb{P}\big([X > x+y]\big)}{\mathbb{P}\big([X > x]\big)} \end{array} \qquad \textit{(car } [X > x+y] \subset [X > x]\textit{)}$$

  Ainsi : $\dfrac{\mathbb{P}\big([X > x+y]\big)}{\mathbb{P}\big([X > x]\big)} = \mathbb{P}\big([X > y]\big)$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0,\ R(x+y) = R(x) \times R(y).}$$

- Soit $x_0 \in [0, +\infty[$. Notons h_{x_0} la fonction $h_{x_0} : y \mapsto R(x_0 + y)$.

  D'après l'égalité au-dessus : $\forall y \geqslant 0,\ h_{x_0}(y) = R(x_0) \times R(y)$.
  En particulier, on en déduit que la fonction h_{x_0} est dérivable sur $[0, +\infty[$ car R l'est.

$$\begin{array}{rl} & \forall y \geqslant 0,\ h_{x_0}(y) = R(x_0 + y) \\ \text{ainsi} & \forall y \geqslant 0,\ h'_{x_0}(y) = R'(x_0 + y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} & \forall y \geqslant 0,\ h_{x_0}(y) = R(x_0) \times R(y) & & \\ \text{ainsi} & \forall y \geqslant 0,\ h'_{x_0}(y) & = & R(x_0) \times R'(y) \\ & & = & R(x_0) \times \big(-f_X(y)\big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall y \geqslant 0,\ R'(x_0 + y) = \big(-f_X(y)\big) \times R(x_0).}$$

- En particulier, pour $y = 0$, on trouve : $\forall x_0 \geqslant 0,\ R'(x_0) = \big(-f_X(0)\big) \times R(x_0)$.

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall x_0 \geqslant 0,\ R'(x_0) + \mu\, R(x_0) = 0.}$$

Commentaire

- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie à la manière dont chaque question est découpée en sous-question. Moins il y a de sous-questions, plus le candidat doit prendre des initiatives et plus le sujet est difficile. Ainsi, un même thème peut amener à un traitement différent lorsqu'il est abordé dans un sujet du `TOP3` ou du `TOP5`.
- Dans les sujets, on distingue grossièrement trois types de questions :

  (1) des questions abordables qui sont traitées par un grand nombre de candidats. Il peut s'agir de questions de cours ou de questions classiques (celles qui reviennent chaque année aux concours).

  (2) des questions plus difficiles qui permettent de bien classer les candidats. Celles-ci ont un rôle fort pour le classement des candidats car sont abordées avec plus ou moins de succès.

  (3) des questions très difficiles qui ne sont bien traitées presque par aucun candidat.

  Dans les sujets du `TOP5`, on trouve essentiellement des questions de type ***1)*** et ***2)***. Dans les sujets du `TOP3`, on trouve les trois types de questions, avec un pourcentage élevé de questions de type ***2)***. C'est d'ailleurs essentiellement sur ces questions que se font les différences et en aucun cas les questions de type ***3)***.
- Ces dernières années, la taille des sujets a eu tendance à grossir pour s'établir à près de 60 questions par énoncé. Pour finir un sujet, un candidat ne dispose donc que d'environ 4 minutes pour traiter chaque question. Il ne faut pas s'inquiéter pour autant car les barèmes permettent de rebattre les cartes. En effet, un candidat qui obtient 50% des points d'un sujet aura une très bonne note (de 16 à 20 en fonction des années et des épreuves).
  Cette considération sur la taille des sujets et la distinction précédente permettent d'éclairer sur la stratégie à adopter lors des concours :
  - il est essentiel de savoir repérer la difficulté d'une question. Ce n'est pas chose aisée car cela requiert d'avoir du recul.
  - il est essentiel de savoir traiter la majorité des questions de type ***(1)***.
  - il est important de réussir à traiter correctement des questions de type ***(2)***. C'est sur le bon traitement de ces questions que se joue le classement.
  - pour les questions de type ***(3)*** (ou les questions de type ***(2)*** les plus difficiles), il faut garder en tête que plus une question est difficile, plus le correcteur est indulgent avec les candidats qui s'y aventurent. On peut donc aborder ces questions avec l'idée que tout ce qu'un candidat écrit de juste sera retenu en sa faveur (quelques points accordés). Mais tenter de traiter ces questions en entier est une perte de temps préjudiciable : le nombre de points alloués ne sera certainement pas à hauteur du temps investi.

  En résumé, il faut aborder en priorité les questions de type ***(1)*** et ***(2)*** et les traiter en entier. Il ne faut surtout pas abandonner une question que l'on sait tratiter. L'important est de maximiser le nombre de questions que l'on traite entièrement. En revanche, il ne faut pas hésiter à passer une questions les plus difficiles quitte à signaler au correcteur qu'on ne sait pas comment conclure si on les aborde.
- La question ***2.b)(ii)*** du sujet est clairement de type ***(3)*** car elle nécessite une prise d'initiatives beaucoup trop importante. Pour que cette question puisse être abordée avec profit par certains candidats, il aurait été préférable de la découper en sous-questions. En particulier, on aurait pu demander en amont la démonstration de l'égalité suivante :

$$\forall x \geqslant 0, \forall y \geqslant 0,\ R(x+y) = R(x) \times R(y)$$

□

(iii) Calculer la dérivée de $x \mapsto R(x)\ \mathrm{e}^{\mu x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto R(x)\ \mathrm{e}^{\mu x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{rcll} h'(x) & = & R'(x) \times \mathrm{e}^{\mu x} + R(x) \times \big(\mu\, \mathrm{e}^{\mu x}\big) & \\ & = & \big(R'(x) + \mu\, R(x)\big)\, \mathrm{e}^{\mu x} & \\ & = & 0 & \textit{(d'après le résultat précédent)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ h'(x) = 0}$$

Commentaire

La question précédente était particulièrement difficile. Celle-ci, en revanche, est particulièrement simple. On en conclut qu'il n'y a pas forcément dans tout le sujet de croissance linéaire de la difficulté. Ainsi, passer une question (dont le résultat est présent dans l'énoncé) ne doit pas empêcher de tenter d'aborder la suivante. □

(iv) Déduire que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- D'après la qestion précédente : $\forall x \geqslant 0,\ h'(x) = 0$.
  On en déduit que la fonction h est constante sur $[0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{ccccccccl} h(x) & = & h(0) & & & & & & \\ \parallel & & \parallel & & & & & & \\ R(x)\,\mathrm{e}^{\mu\,x} & & R(0)\,\mathrm{e}^{\mu\,0} & = & \mathbb{P}\big([X > 0]\big) & = & \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big) & = & 1 \quad \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à valeurs positives)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ \forall x \geqslant 0,\ R(x)\,\mathrm{e}^{\mu\,x} = 1 \ \text{ ou encore : } \ R(x) = \mathrm{e}^{-\mu\,x}.}$$

- Déterminons la fonction de répartition de X.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - si $x < 0$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :
    $$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  - si $x \geqslant 0$, alors :
    $$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big([X > x]\big) \ = \ 1 - R(x) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{\mu\,x}$$

On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{E}(\mu)$.
Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu).}$$

□

Commentaire

- La question ***2)*** permet de démontrer que si X est une v.a.r. à densité alors :

1) $X(\Omega) = [0, +\infty[$ ***2)*** $\forall x \geqslant 0, \forall y \geqslant 0, \mathbb{P}_{[X>x]}\big([X > x + y]\big) = \mathbb{P}\big([X > y]\big)$ ***3)*** $\forall x \geqslant 0, f_X(x) > 0$	$\Leftrightarrow$	X suit une loi exponentielle

  Dans la démonstration, on précise que le paramètre de la loi exponentielle obtenue n'est autre que $\mu = f_X(0)$.
- On a énoncé ici une équivalence. La propriété ci-dessus caractérise les v.a.r. qui suivent une loi exponentielle.
- Dans le contexte où la v.a.r. X désigne la durée de fonctionnement (ou durée de vie) d'un système (ou d'un composant électronique), la propriété ***2)*** signifie que la durée de vie restante du composant est indépendante de sa durée de vie écoulée jusqu'alors (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. On dit alors que la loi exponentielle est **sans mémoire**. Cette propriété est adaptée à la simulation de phénomène sans vieillissement. Cette hypothèse peut paraître surprenante. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés.
- Finalement, on a démontré en ***2.*** que la loi exponentielle est sans mémoire. Mieux : c'est même la seule loi à densité sans mémoire.
  Pour ce qui est des v.a.r. discrètes, on peut démontrer que la seule loi sans mémoire est la loi géométrique.
  Il est donc classique que ces apparaissent dans les sujets qui traitent de durée de vie d'un système / d'un composant. Plus précisément :
  × si cette durée de vie / de fonctionnement est mesurée en nombre entier (nombre de cycles d'une batterie avant panne par exemple), c'est la loi géométrique qui risque d'apparaître.
  × si cette durée de vie / de fonctionnement est mesurée de manière continue, c'est la loi exponentielle qui risque d'apparaître.

3. Soient deux réels strictement positifs μ_1 et μ_2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2.

a) On pose $Y = \max(X_1, X_2)$.
Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire la densité de la variable Y.

Démonstration.

- Comme X_1 et X_2 suivent des lois exponentielles, on considère : $X_1(\Omega) = [0, +\infty[= X_2(\Omega)$.

$$\boxed{\text{D'où : } Y(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

× si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\Big([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x]\Big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant x]\big) \times \mathbb{P}\big([X_2 \leqslant x]\big) & \textit{(car X_2 et X_2 sont indépendantes)} \\ & = & F_{X_1}(x) \times F_{X_2}(x) & \\ & = & (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x}) \times (1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}) & \textit{(car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_2)$)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x})\,(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- La fonction F_Y est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante (nulle) sur cet intervalle.
  × sur $]0, +\infty[$ par produit de fonctions continues sur cet intervalle.
  × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$,
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = \big(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 0}\big)\,\big(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 0}\big) = (1-1)\,(1-1) = 0$.

  Et ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = F_Y(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

Pour déterminer une densité f_Y de Y, on dérive F_Y sur les intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Si $x \in]-\infty, 0[$.

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$$

× Si $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} f_Y(x) & = & F_Y'(x) \\ & = & \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\,(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}) + (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x})\,\mu_2\,\mathrm{e}^{-\mu_2 x} \\ & = & \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x} - \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\,\mathrm{e}^{-\mu_2 x} - \mu_2\,\mathrm{e}^{-\mu_2 x}\,\mathrm{e}^{-\mu_1 x} + \mu_2\,\mathrm{e}^{-\mu_2 x} \\ & = & \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x} - (\mu_1 + \mu_2)\,\mathrm{e}^{-(\mu_1 + \mu_2)\,x} + \mu_2\,\mathrm{e}^{-\mu_2 x} \end{array}$$

× On choisit enfin : $f_Y(0) = 0$.

Ainsi, une densité f_Y de Y est :
$$f_Y : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \,]-\infty, 0] \\ \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 t} - (\mu_1 + \mu_2)\, \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\, t} + \mu_2\, \mathrm{e}^{-\mu_2 t} & \text{si } t \in \,]0, +\infty[\end{cases}.$$

□

b) On pose $Z = \min(X_1, X_2)$.
Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z et en déduire la loi de Z.

Démonstration.

- Comme X_1 et X_2 suivent des lois exponentielles, on considère : $X_1(\Omega) = [0, +\infty[\, = X_2(\Omega)$.

  D'où : $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

  × si $x < 0$, alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$ (car $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :
  $$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}\big([Z \leqslant x]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  × si $x \geqslant 0$, alors :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Z > x]\big) &= \mathbb{P}\Big([X_1 > x] \cap [X_2 > x]\Big) \\ &= \mathbb{P}\big([X_1 > x]\big) \times \mathbb{P}\big([X_2 > x]\big) && \textit{(car } X_2 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \mathrm{e}^{-\mu_1 x} \times \mathrm{e}^{-\mu_2 x} && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1) \textit{ et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_2)\textit{)} \\ &= \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\, x} \end{aligned}$$

  Ainsi : $F_Z(x) = \mathbb{P}\big([Z \leqslant x]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([Z > x]\big) = 1 - \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\, x}$.

  Finalement : $F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

- On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$.
  Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

  On en conclut : $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$.

□

II. Fiabilité

Soit T une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que T est une variable à densité f_T continue sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
On appelle fiabilité de T la fonction R_T définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$R_T(t) = \mathbb{P}([T \geqslant t]) = \mathbb{P}([T > t]) = 1 - F_T(t)$$

où F_T est la fonction de répartition de T.

4. Soient t un réel positif ou nul et h un réel strictement positif.
La dégradation du système sur l'intervalle $[t, t+h]$ est mesurée par la probabilité $\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big)$.
Exprimer cette quantité à l'aide de la fonction R_T.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big) &= F_T(t+h) - F_T(t) && \textit{(car } T \textit{ est à densité)} \\ &= \big(\cancel{1} - R_T(t+h)\big) - \big(\cancel{1} - R_T(t)\big) \\ &= R_T(t) - R_T(t+h) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ \mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big) = R_T(t) - R_T(t+h)}$$

□

5. Montrer que, pour tout réel t positif ou nul,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}([t \leqslant T \leqslant t+h])}{h} = f_T(t)$$

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

- Soit $h > 0$. D'après la question précédente :

$$\frac{\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big)}{h} = \frac{R_T(t) - R_T(t+h)}{h} = -\frac{R_T(t+h) - R_T(t)}{h}$$

- La fonction f_T est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction F_T, qui est une primitive de f_T, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $R_T : t \mapsto 1 - F_T(t)$, la fonction R_T est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, en particulier en t. Ainsi :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{R_T(t+h) - R_T(t)}{h} = R_T'(t) = -F_T'(t) = -f_T(t)$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big)}{h} = -\big(-f_T(t)\big) = f_T(t)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t \geqslant 0,\ \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big)}{h} = f_T(t)}$$

Commentaire

L'énoncé souhaitait sans doute que l'on utilise le résultat final de la question précédente (ce que l'on fait dans la démonstration ci-dessus). On pouvait aussi choisir de raisonner avec la fonction F_T plutôt que la fonction R_T.

- Soit $h > 0$. D'après la question précédente :
$$\frac{\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h] \big)}{h} = \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h}$$
- La fonction f_T est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction F_T, qui est une primitive de f_T, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. En particulier elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et donc en $t \in \mathbb{R}_+$. On en déduit :
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h} = F_T'(t) = f_T(t)$$

□

6. a) Justifier que pour tout réel t positif, $R_T(t) > 0$.

Démonstration.

- Comme démontré dans la question précédente, la foncion R_T est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
$$R_T'(t) = -f_T'(t)$$
Or, d'après l'énoncé, si $t \in \mathbb{R}_+^*$, alors : $f_T(t) > 0$. Ainsi :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad R_T'(t) < 0$$
- La fonction R_T est donc :
  × continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+$,
  × strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

  Ainsi, la fonction R_T réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $R_T\big([0, +\infty[\big)$.
$$R_T\big([0, +\infty[\big) = \left] \lim_{t \to +\infty} R_T(t), R_T(0) \right]$$
  Or :
  × d'une part :
$$R_T(0) = 1 - F_T(0) = 1 - 0 = 1$$
  En effet :
$$\begin{aligned} F_T(0) &= \mathbb{P}\big([T \leqslant 0] \big) \\ &= \mathbb{P}\big([T = 0] \big) && \textit{(car } T \textit{ est à valeurs positives)} \\ &= 0 && \textit{(car } T \textit{ est à densité)} \end{aligned}$$
  × d'autre part :
$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} R_T(t) &= \lim_{t \to +\infty} 1 - F_T(t) \\ &= 1 - 1 && \textit{(car } F_T \textit{ est une fonction de répartition)} \end{aligned}$$
  Finalement, la fonction R_T réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \forall t \geqslant 0,\ R_T(t) > 0.}$$

□

On appelle taux de défaillance la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par le rapport $\lambda(t) = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)}$.

b) On note : $g : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{R_T(t)}\right)$. Démontrer que $\lambda = g'$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$g(t) \ = \ \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) \ = \ -\ln\big(R_T(t)\big)$$

- La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$, car elle est la composée $g = h \circ R_T$ de :
  - $\times$ R_T qui est :
    - dérivable sur $[0, +\infty[$,
    - telle que : $h([0, +\infty[) \subset \,]0, +\infty[$, d'après la question précédente.
  - $\times$ $h : t \mapsto -\ln(t)$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(t) \ = \ R_T'(t) \times (h' \circ R_T)(t) \ = \ -\frac{R_T'(t)}{R_T(t)} \ = \ -\frac{-f_T(t)}{R_T(t)} \ = \ \frac{f_T(t)}{R_T(t)} \ = \ \lambda(t)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda = g'.}$$

□

c) Déduire l'expression de R_T en fonction de λ à l'aide d'une intégrale.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $g' = \lambda$. On en déduit que la fonction g est une primitive de λ.
- Avec des arguments similaires à ceux de la dérivabilité, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que la fonction λ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  Cette fonction λ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une primitive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Considérons par exemple la primitive H de λ qui s'annule en 0. Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad H(x) \ = \ \int_0^x \lambda(t)\ dt$$

  La fonction g recherchée coïncide avec H à une constante près. Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = H(x) + c$.
- Commençons par déterminer H.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H(x) \ &= \ \int_0^x \lambda(t)\ dt \\ &= \ \int_0^x g'(t)\ dt \\ &= \ [\ g(t)\ ]_0^x \\ &= \ g(x) - g(0) \end{aligned}$$

  Or, d'après ***6.a)*** : $g(0) = -\ln\big(R_T(0)\big) = -\ln(1) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ H(x) = g(x).}$$

- On obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{array}{rrcl} & g(x) & = & \displaystyle\int_0^x \lambda(t)\ dt \\ \text{donc} & -\ln\big(R_T(x)\big) & = & \displaystyle\int_0^x \lambda(t)\ dt \\ \text{d'où} & \ln\big(R_T(x)\big) & = & -\displaystyle\int_0^x \lambda(t)\ dt \\ \text{ainsi} & R_T(x) & = & \exp\left(-\displaystyle\int_0^x \lambda(t)\ dt\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ R_T(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\ dt\right).}$$

□

7. Soit Z une variable aléatoire réelle positive de densité g continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une espérance. On pose $R_Z(t) = \mathbb{P}([Z > t])$ pour $t \geqslant 0$.

a) Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v(t) = tR_Z(t)$.
Démontrer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$ où v' désigne la dérivée de v.

Démonstration.

- La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est le produit $v = h_1 \times R_Z$ de :
  - × $h_1 : t \mapsto t$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale,
  - × R_Z dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec une démonstration similaire à celle de la question ***5.***

$$\boxed{\text{La fonction } v \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$v'(t) \ = \ 1 \times R_Z(t) + t \times R'_Z(t) \ = \ R_Z(t) - t\,g(t)$$

On peut en effet démontrer, comme en question ***5.*** : $R'_Z(t) = -g(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \mathbb{R}_+,\ t\,g(t) = R_Z(t) - v'(t).}$$

□

b) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$v(t) \ = \ t\,R_Z(t) \ = \ t\,\mathbb{P}\big(\,[Z > t]\,\big) \ = \ t \int_t^{+\infty} g(x)\ dx \ = \ \int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx$$

- On sait déjà, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$0 \ \leqslant \ \int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx \ = \ v(t)$$

En effet, g est une densité et donc positive sur $\mathbb{R}$, et : $t \geqslant 0$.
On cherche alors à trouver un majorant de v admettant 0 pour limite en $+\infty$, pour pouvoir appliquer le théorème d'encadrement.

- Pour majorer l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx$, on cherche à majorer, pour tout $x \in [t,+\infty[$, l'intégrande $t\,g(x)$.
Soit $x \in [t,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcccccl} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & x & \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & t\,g(x) & \leqslant & x\,g(x) & \textit{(car, comme } g \textit{ est une densité : } g(x) \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

Soit $B \in [t,+\infty[$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\int_t^B t\,g(x)\ dx \ \leqslant \ \int_t^B x\,g(x)\ dx$$

- Or :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx$ est convergente. En effet, comme g est une densité, l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty} g(x)\ dx$ est convergente.
  × l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx$ est convergente, car Z admet une espérance (et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g(x)\ dx$ est convergente)

  On en déduit :

$$0 \ \leqslant \ \underset{\displaystyle v(t)}{\underset{\shortparallel}{\int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx}} \ \leqslant \ \int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx$$

- Démontrons enfin : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx = 0$.

  Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Comme Z admet une espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Z) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g(x)\ dx \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x\,g(x)\ dx + \int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx \end{array}$$

  d'où :

$$\int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx \ = \ \mathbb{E}(Z) - \int_{-\infty}^{t} x\,g(x)\ dx \quad \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(Z) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx = 0.}$$

Commentaire

- Ce point est une illustration d'un résultat classique sur les intégrales impropres. Étant donnée une intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt$ convergente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcccc} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt & = & \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)\, dt} & + & \underbrace{\displaystyle\int_{x}^{+\infty} h(t)\, dt} \\ & = & H(x) & + & R(x) \end{array}$$

La quantité $R(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} h(t)\, dt$ est appelé reste de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt$.
La fonction R ainsi construite admet pour limite 0 en $+\infty$. En effet :

$$R(x) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt - \int_{-\infty}^{x} h(t)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = 0$$

- On connaît déjà un résultat classique similaire sur les séries. Étant donnée une série $\sum u_n$ convergente, de somme notée S et dont la suite des sommes partielles est notée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k} & = & \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k} & + & \underbrace{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k} \\ S & = & S_n & + & R_n \end{array}$$

La quantité $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
La suite (R_n) ainsi construite est convergente de limite nulle. En effet :

$$R_n \ = \ S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$$

- On sait donc :
  × $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant v(t) \leqslant \displaystyle\int_{t}^{+\infty} x\, g(x)\, dx = 0$
  × $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_{t}^{+\infty} x\, g(x)\, dx = 0$
  × $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 0 = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0.}$$

□

c) En déduire que $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} R_Z(t)\, dt$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme Z est à valeurs positives, sa densité g est nulle en dehors de $[0, +\infty[$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(Z) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\, dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} t\, g(t)\, dt$$

- D'après ***7.a)*** :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t\, g(t) \ = \ R_Z(t) - v'(t)$$
Ainsi, pour tout $B \in [0, +\infty[$:
$$\begin{aligned} \int_0^B t\, g(t)\, dt &= \int_0^B \big(R_Z(t) - v'(t)\big)\, dt \\ &= \int_0^B R_Z(t)\, dt - \int_0^B v'(t)\, dt \end{aligned}$$

- Or :
$$\begin{aligned} \int_0^B v'(t)\, dt &= [\ v(t)\ ]_0^B \\ &= v(B) - v(0) \\ &= v(B) - \cancel{0 \times g(0)} \qquad \textit{(par définition de } v\textit{)} \end{aligned}$$

- On obtient :
$$\int_0^B R_Z(t)\, dt \ = \ \int_0^B t\, g(t)\, dt + v(B)$$
Or :
$\times$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, g(t)\, dt$ est convergente et vaut $\mathbb{E}(Z)$,
$\times$ d'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} v(B) = 0$.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_Z(t)\, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{De plus : } \int_0^{+\infty} R_Z(t)\, dt = \mathbb{E}(Z) + 0 = \mathbb{E}(Z).}$$

□

8. On suppose désormais que T admet une espérance. Soit t un réel positif fixé, le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire $T_t = T - t$ représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne.
On a donc, pour tout réel x positif :
$$R_{T_t}(x) = \mathbb{P}([T_t > x]) = \mathbb{P}_{[T>t]}([T > t + x])$$

Commentaire

Notons que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, la quantité $R_{T_t}(x)$ est bien définie car, d'après la question ***6.a)*** :
$$\mathbb{P}\big(\,[T > t]\,\big) = R_T(t) > 0$$

a) Démontrer, pour tout réel x positif : $R_{T_t}(x) = \dfrac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{rcll} R_{T_t}(x) & = & \mathbb{P}_{[T>t]}\big([T > t+x]\big) & \textit{(d'après l'énoncé)} \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}\big([T>t+x] \cap [T>t]\big)}{\mathbb{P}\big([T>t]\big)} & \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}\big([T>t+x]\big)}{\mathbb{P}\big([T>t]\big)} & \textit{(car, comme } x \geqslant 0 \textit{ :} \\ & & & [T>t+x] \subset [T>t]\textit{)} \\ & = & \dfrac{R_T(t+x)}{R_T(t)} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ R_{T_t}(x) = \dfrac{R_T(t+x)}{R_T(t)}}$$

□

b) En déduire :

$$\mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)\ du$$

Démonstration.

- On souhaite ici appliquer la question ***7.*** à la v.a.r. T_t. On démontre donc que cette v.a.r. vérifie bien les hypothèses nécessaires.
- On se place ici dans le cas où le système a fonctionné sans panne jusqu'à l'instant t (autrement dit, on se place dans le cas où l'événement $[T > t]$ est réalisé). Alors la v.a.r. $T_t = T - t$:
  × est à valeurs (strictement) positives,
  × est à densité en tant que transformée affine de T ($T_t = a\,T + b$, où $a = 1$ et $b = -t$) qui est à densité et, en notant g_t une de ses densités :
  $$g_t : x \mapsto \frac{1}{|1|}\ f_T\left(\frac{x-(-t)}{1}\right) = f_T(x+t)$$
  × admet une densité g_t continue sur $\mathbb{R}_+$, car g_t est la composée $g_t = f_T \circ h$ de :
    - $h : x \mapsto x + t$ qui est :
      ▸ continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale,
      ▸ telle que : $f_T(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ (car $t \geqslant 0$).
    - f_T qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  × admet une espérance en tant que transformée affine de T qui en admet une (d'après l'énoncé de cette question ***8.***).
- On est donc bien placé dans le cadre d'application de la question ***7.*** pour la v.a.r. T_t. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T_t) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} R_{T_t}(x)\ dx & \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{R_T(x+t)}{R_T(t)}\ dx & \textit{(d'après la question} \\ & & & \textit{précédente)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+x)\ dx & \end{array}$$

- On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = t + x}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = t + x \quad \text{(et donc } x = u - t\text{)} \\ \hookrightarrow du = dx \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ u = t \\ \bullet\ x = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto u - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)\, du.}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variable affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a bien fait en premier lieu).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.

9. a) On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre μ.
Déterminer la fiabilité et le taux de défaillance.

Démonstration.

- Comme $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, alors :

$$F_T : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_T : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mu\, e^{-\mu x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$$

- Déterminons la fiabilité R_T de T.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$R_T(x) \ = \ 1 - F_T(x) \ = \ \cancel{1} - \left(\cancel{1} - e^{-\mu x}\right) \ = \ e^{-\mu x}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } R_T : x \mapsto e^{-\mu x}.}$$

- Déterminons le taux de défaillance λ_T de T.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\lambda_T(x) \ = \ \frac{f_T(x)}{R_T(x)} \ = \ \frac{\mu\ \cancel{e^{-\mu x}}}{\cancel{e^{-\mu x}}} \ = \ \mu$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lambda_T : x \mapsto \mu.}$$

□

b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
Déterminer la fiabilité du système et son taux de défaillance.

Démonstration.

- On note Z la durée de vie du système en série.
  Comme le système tombe en panne dès que l'in des 2 organes tombe en panne, on en déduit :
  $$Z \ = \ \min(X_1, X_2)$$
- D'après la question ***3.b)***, on en déduit : $Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\mu_1 + \mu_2\right)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après la question précédente, on obtient :}\\ R_Z : x \mapsto \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\,x} \quad \text{et} \quad \lambda_Z : x \mapsto \mu_1 + \mu_2\end{array}}$$

□

c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
Déterminer la fiabilité du système.

Démonstration.

- On note Y la durée de vie du système en parallèle.
  Comme le système tombe en panne quand les 2 organes sont en panne, on en déduit :
  $$Y \ = \ \max(X_1, X_2)$$
- D'après la question ***3.a)***, on en conclut que Y est une v.a.r. à densité et :
  $$F_Y : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1\,x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2\,x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{array}\right.$$
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
  $$R_Y(x) \ = \ 1 - F_Y(x) \ = \ 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1\,x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2\,x}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } R_Y : x \mapsto 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1\,x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2\,x}\right).}$$

□

10. Soit $\varphi_{n,\beta}$ la fonction définie par :

$$\varphi_{n,\beta} : t \mapsto \left\{\begin{array}{cl} \dfrac{\beta}{(n-1)!}\ (\beta t)^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\beta t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array}\right.$$

où $\beta > 0$ est une constante strictement positive et n un entier naturel non nul.

a) Démontrer que $\varphi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité (loi d'Erlang).

Démonstration.

- La fonction $\varphi_{n,\beta}$ est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi_{n,\beta} \text{ est donc continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x < 0$, alors : $\varphi_{n\beta}(x) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $x \geqslant 0$, alors : $\varphi_{n,\beta}(x) = \dfrac{\beta}{(n-1)!} \ (\beta t)^{n-1} \ \mathrm{e}^{-\beta t} \geqslant 0$ (car $\beta > 0$)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_{n,\beta}(x) \geqslant 0}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$ est convergente et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme $\varphi_{n,\beta}$ est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$$

  - × La fonction $\varphi_{n,\beta}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
  - × Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$ converge et vaut 1.

► **Initialisation** :

- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_{0}^{B} \varphi_{1,\beta}(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{B} \frac{\beta}{0!} \ (\beta\, t)^{0}\, \mathrm{e}^{-\beta\, t}\ dt \ = \ \int_{0}^{B} \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t}\ dt$$

- Or la fonction f_β définie par :

$$f_\beta : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\mu)$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t}\ dt$ est donc convergente et vaut 1. Il en est alors de même de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi_{1,\beta}(t)\ dt$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n+1,\beta}(t)\ dt$ converge et vaut 1).

- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_{0}^{B} \varphi_{n+1,\beta}(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{B} \frac{\beta}{n!} \ (\beta\, t)^{n}\, \mathrm{e}^{-\beta\, t}\ dt$$

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclrcl} u(t) & = & \dfrac{1}{n!} \ (\beta\, t)^{n} & u'(t) & = & \dfrac{n\, \beta}{n!} \ (\beta\, t)^{n-1} \ = \ \dfrac{\beta}{(n-1)!} \ (\beta\, t)^{n-1} \\ v'(t) & = & \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-\beta\, t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, B]$.

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{\beta}{n!}\,(\beta\,t)^n\,\mathrm{e}^{-\beta\,t}\,dt &= \left[-\frac{1}{n}\,(\beta\,t)^n\,\mathrm{e}^{-\beta\,t}\right]_0^B - \int_0^B \frac{\beta}{(n-1)!}\,(\beta\,t)^{n-1}\times(-\mathrm{e}^{-\beta\,t})\,dt \\ &= -\frac{1}{n!}\,\beta^n\,B^n\,\mathrm{e}^{-\beta\,B} + 0 + \int_0^B \frac{\beta}{(n-1)!}\,(\beta\,t)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\beta\,t}\,dt \\ &= -\frac{1}{n!}\,(\beta\,B)^n\,\mathrm{e}^{-\beta\,B} + \int_0^B \varphi_{n,\beta}(t)\,dt\end{aligned}$$

- Or, par hypothèse de récurrence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\,dt$ converge et vaut 1.

  De plus, avec le changement de variable $u = \beta\,B$, comme $\beta > 0$:

$$\lim_{B\to+\infty} (\beta\,B)^n\,\mathrm{e}^{-\beta\,B} = \lim_{u\to+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u} = 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

- Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\beta}(t)\,dt$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\beta}(t)\,dt \;=\; 0+1 \;=\; 1$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Finalement, la fonction $\varphi_{n,\beta}$ est bien une densité de probabilité.

□

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\varphi_{n,\beta}$. Montrer que la fiabilité à la date t est :

$$R_T(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\beta t)^k}{k!}$$

Démonstration.

- Par définition de R_T :

$$R_T : x \mapsto 1 - F_T(x)$$

  Comme F_T est la primitive de $\varphi_{n,\beta}$ qui admet pour limité 1 en $+\infty$, alors R_T est la primitive de $-\varphi_{n,\beta}$ qui admet pour limite 0 en $+\infty$.
  Démontrons alors que la fonction G définie par :

$$G : t \mapsto \mathrm{e}^{-\beta\,t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\beta\,t)^k}{k!}$$

  vérifie ces 2 propriétés :
  × elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $G' = -\varphi_{n\beta}$,
  × $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} G(t) = 0$

- La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est le produit $G = h_1 \times h_2$ de :
  × $h_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{-\beta\, t}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$,
  × $h_2 : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\beta\, t)^k}{k!}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car c'est une fonction polynomiale.

  Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
$$\begin{aligned}
G'(t) &= h_1'(t)\, h_2(t) + h_1(t)\, h_2'(t) \\
&= -\beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta\, t)^k}{k!} + \mathrm{e}^{-\beta\, t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta\, k}{k!}\, (\beta\, t)^{k-1} \\
&= \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta\, t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!}\, (\beta\, t)^{k-1} \right) \\
&= \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta\, t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!}\, (\beta\, t)^{k-1} \right) \\
&= \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta\, t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\beta\, t)^k}{k!} \right) \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} \left(-\cancel{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\beta\, t)^k}{k!}} - \frac{(\beta\, t)^{n-1}}{(n-1)!} + \cancel{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\beta\, t)^k}{k!}} \right)
\end{aligned}$$
  On en déduit :
$$G'(t) = -\frac{\beta}{(n-1)!}\, (\beta\, t)^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} = -\varphi_{n,\beta}(t)$$
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ G'(t) = -\varphi_{n,\beta}(t)}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
$$G(t) = \mathrm{e}^{-\beta\, t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta\, t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left((\beta\, t)^k\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} \right)$$
  Or, par croissances comparées, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:
$$\lim_{t \to +\infty} (\beta\, t)^k\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} = 0$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t \to +\infty} G(t) = 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } R_T = G.}$$ □

Commentaire

- La loi présentée dans cette question ***10.)*** est appelée loi d'Erlang (hors programme) de paramètres n et β. Cette loi est liée à des lois de probabilité classiques :
  × lorsque $n = 1$ (*cf* initialisation de la récurrence du ***10.)***), on reconnaît la loi exponentielle de paramètre β.
  × de manière générale, la loi d'Erlang est un cas spécial de la loi Gamma (qui admet deux paramètres notés généralement α et β) dont une densité est donnée par :
$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, \mathrm{e}^{-\beta t}\, t^{\alpha-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$
  En prenant $\alpha = n$, on reconnaît la densité f_n de la quesiton de l'énoncé.

Commentaire

- Cette loi Gamma se définit à l'aide de la fonction :
$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$$
que l'on peut rencontrer par exemple dans `ESSEC II 2005`.
Pour rappel, la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on peut démontrer (penser à une IPP) :
$$\begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \forall x > 0, \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \end{cases}$$
de sorte que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \Gamma(n+1) = n!$.
(on peut voir la fonction Γ comme un prolongement de la fonction factorielle)
- La loi de Weibull est elle aussi très classique aux concours (c'est l'objet de la question ***11.***).

11. Soit $\psi_{\beta,\eta}$ la fonction définie par :
$$\psi_{\beta,\eta} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
où $\beta \geqslant 1, \eta > 0$.

a) Vérifier que $\psi_{\beta,\eta}$ est une densité de probabilité (loi de Weibull).

Démonstration.

- La fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \psi_{\beta,\eta} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $t < 0$, alors : $\psi_{\beta,\eta}(t) = 0 \geqslant 0$.
  × si $t \geqslant 0$, alors : $\psi_{\beta,\eta}(t) = \dfrac{\beta}{\eta} \left(\dfrac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$ (car $\beta > 0$ et $\eta > 0$)

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \, \psi_{\beta,\eta}(t) \geqslant 0}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) \, dt$ converge et vaut 1.
  × Tout d'abord, comme la fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) \, dt \ = \ \int_0^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) \, dt$$
  × De plus, la fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) \, dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.

× Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^B \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt = \int_0^B \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\, dt = \left[-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \right]_0^B = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{B}{\eta}\right)^\beta}$$

Or, comme $\beta > 0$: $\lim\limits_{B \to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{B}{\eta}\right)^\beta} = 1 - 0 = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \psi_{\beta,\eta} \text{ est donc une densité de probabilité.}}$$

□

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\psi_{\beta,\eta}$.
Déterminer la fiabilité $R_T(t)$ et le taux de défaillance $\lambda(t)$ à la date t.

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $T(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{T(\Omega) = [0, +\infty[}$$

- Déterminons R_T. Pour cela on commence par déterminer la fonction de répartition F_T de T. Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

  × si $x < 0$, alors $[T \leqslant x] = \varnothing$ (car $T(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :

$$F_T(x) = \mathbb{P}\big([T \leqslant x]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \int_{-\infty}^x \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt \\ &= \int_0^x \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt && \textit{(car } \psi_{\beta,\eta} \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= \int_0^x \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\, dt \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} && \textit{(en reprenant les calculs de la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\text{Comme, pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ R_T(t) = 1 - F_t(t), \text{ on obtient : } R_T : x \mapsto \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}.}$$

- Déterminons maintenant λ.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\lambda(t) = \frac{\psi_{\beta,\eta}(t)}{R_T(t)} = \frac{\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cancel{\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}}}{\cancel{\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}}} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lambda : t \mapsto \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}}$$

□

c) Étudier $\lim_{t\to+\infty} \lambda(t)$ en fonction de la valeur de β.

Démonstration.

- Soit $t \in [0,+\infty[$. D'après la question précédente :

$$\lambda(t) \;=\; \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

- D'après l'énoncé : $\beta \geqslant 1$. Deux cas se présentent alors :

  × si $\beta = 1$, alors :

$$\lambda(t) \;=\; \frac{1}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{1-1} \;=\; \frac{1}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{0} \;=\; \frac{1}{\eta}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \beta = 1\text{, alors : } \lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = \frac{1}{\eta}.}$$

Commentaire

Notons que si $\beta = 1$, alors $\psi_{1,\eta}$ est une densité de la loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\eta}\right)$. On retrouve bien dans ce cas, conformément à la question ***9.a)***, un taux de défaillance constant.

  × si $\beta > 1$, alors :

$$\lambda(t) \;=\; \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

Comme $\eta > 0$, alors : $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\eta} = +\infty$. Or $\beta - 1 > 0$. D'où : $\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \beta > 1\text{, comme } \eta > 0\text{, alors : } \lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = +\infty.}$$

□