DS6 (version A)

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.
Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)\ P'$$

Par exemple : $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

- **- 2 pt : a est linéaire**
- **- 1 pt : si $P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, alors $(a(P))(X) = -\gamma X^2 + \alpha$**
- **- 1 pt : $a(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 donc $a(P) \in E$**

2. ***a)*** Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- **- 1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **- 1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **- 1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Déterminer le rang de la matrice A.

- **- 1 pt :** $\mathrm{rg}(A) = 2$

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

- **- 1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(a)) = \mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 = \dim(E)$
- **- 1 pt :** $\mathrm{Im}(A) \neq E$ **donc l'endomorphisme a n'est pas surjectif**
- **- 1 pt :** $\dim(\mathrm{Ker}(a)) = 1$ **par théorème du rang**
- **- 1 pt :** $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Vect}\,(P_1)$
- **- 1 pt :** $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Vect}\,(a(P_0),\ a(P_1),\ a(P_2))$
- **- 1 pt :** $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Vect}\,(P_0, P_2)$
- **- 1 pt :** (P_0, P_2) **est une base de** $\mathrm{Im}(a)$
- **- 1 pt bonus : pas de confusion d'objets**

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

- **1 pt :** $b \circ g = \mathrm{id}_E$ **où** $g(Q) = Q + Q' + Q''$
- **1 pt :** $g \circ b = \mathrm{id}_E$

5. a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

- **1 pt :** B **est la matrice représentative de** b **dans la base** $\mathscr{B}$ **donc** $\mathrm{Sp}(b) \; = \; \mathrm{Sp}(B)$
- **3 pt :** $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : La matrice** B **est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(b) = \mathrm{Sp}(B) = \{1\}$

b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

- **1 pt : si** b **est diagonalisable alors il existe une matrice inversible** $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ **et une matrice diagonale** $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ **dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de** B **telles que** $B = PDP^{-1}$
- **1 pt :** $D = I$ **donc** $B = I$**. C'est absurde.**

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(c) \; = \; \mathrm{rg}(C) \; = 2$
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(c) \neq E$ **donc l'endomorphisme** c **n'est pas surjectif donc** c **n'est pas bijectif**

8. a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre trois, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

- **3 pt :** $\mathrm{Sp}(C) = \{-2, 0, 2\}$ **(1 pt pour la méthode même en cas d'erreur de calcul)**
- **3 pt :** $E_0(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ **(1 pt système, 1 pt résolution, 1 pt conclusion)**
- **3 pt :** $E_2(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- **3 pt :** $E_{-2}(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

- **1 pt : la matrice C est diagonalisable et C est une matrice représentative de c dans la base $\mathscr{B}$ donc l'endomorphisme c est diagonalisable**
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2)$ **donc** $E_0(c) = \text{Vect}\,(P_0 - P_2)$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2)$ **donc** $E_2(c) = \text{Vect}\,(P_0 + 2P_1 + P_2)$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2)$ **donc** $E_{-2}(c) = \text{Vect}\,(P_0 - 2P_1 + P_2)$
- **1 pt : Une base de E constituée de vecteurs propres de c est** $(P_0 - 2 \cdot P_1 + P_2, P_0 - P_2, P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2)$

Partie IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.

- **2 pt : calcul**

10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

- **1 pt : si $P \in E$, alors** $(f \circ f \circ f)(P) = P''' = 0_E$ **donc** $f \circ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$
- **1 pt :** $(BA - AB)^3 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ f) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

Exercice 2

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

- **2 pt : φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$ (0 pt si : « la fonction φ est composée de ... »)**
- **1 pt : $\varphi'(x) \ = \ \mathbf{e}^x + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$**
- **1 pt : $\varphi''(x) \ = \ \mathbf{e}^x - \dfrac{1}{x^3}\ \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$**
- **1 pt : $\varphi'''(x) \ = \ \mathbf{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\ \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$**

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

- **1 pt : pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi'''(x) > 0$ donc φ'' est croissante sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : $\varphi''(1) = 0$**
- **1 pt :**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ'	$+\infty$	$\searrow$	$\mathbf{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt : φ' admet un minimum en 1 et $\varphi'(1) = \mathbf{e}$ donc pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant \mathbf{e}$**

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

- **1 pt : $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{\mathbf{e}^X}{X} \ = \ +\infty$ par croissances comparées**
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$**

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$**
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$**

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3,+\infty[,\ \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\,x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

- **1 pt : On note $h : x \mapsto \varphi(x) - \mathbf{e}\,x$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $h'(x) \geqslant 0$.**
- **1 pt : $\forall x \in [3,+\infty[$, $h(x) \geqslant h(3)$**
- **1 pt : $h(3) \ = \ \varphi(3) - 3\,\mathbf{e} \ > \ 15 - 3\,\mathbf{e} \ > \ 0$**

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

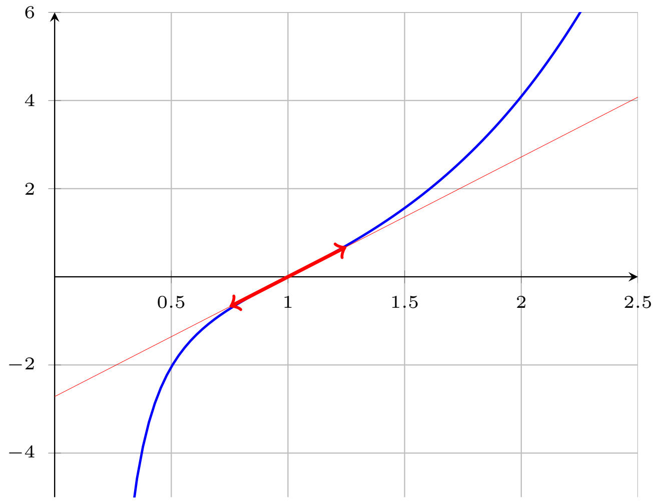
- **1 pt : La fonction φ'' est négative sur $]0,1]$ et positive sur $[1,+\infty[$, la fonction φ change donc de convexité en 1, seul point d'inflexion de la courbe représentative de φ**
- **1 pt : La courbe représentative de φ admet pour point d'inflexion, le point de coordonnées $(1,0)$**
- **1 pt : L'équation de la tangente à la courbe représentative de φ en 1 est :**
  $y \;=\; \varphi'(1)(x-1)+\varphi(1) \;=\; \mathbf{e}\,(x-1)$

7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

- **1 pt :**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$		$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- **4 pt : (1 pt tangente, 1 point concavité/convexité, 1 pt limites, 1 pt croissance)**

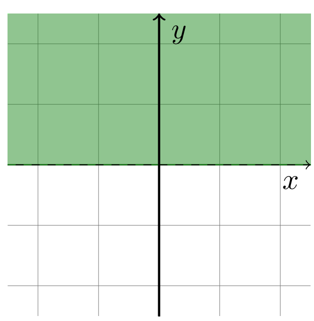


Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times \,]0,+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy - \mathrm{e}^x \ln(y)$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.

- **1 pt :**



9. `(CUBES uniquement)` Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x,y).

- **1 pt : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U (bonus 1 pt si détails)**
- **6 pt : (1 pt par formule juste)**

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x,y) \in U, \quad \partial_1(f)(x,y) \ = \ y - \ln(y)\,\mathbf{e}^x, \quad \partial_2(f)(x,y) \ = \ x - \dfrac{\mathbf{e}^x}{y} \\ \partial^2_{1,1}(f)(x,y) \ = \ -\ln(y)\,\mathbf{e}^x, \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \ = \ 1 - \dfrac{\mathbf{e}^x}{y} \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) \ = \ 1 - \dfrac{\mathbf{e}^x}{y}, \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) \ = \ \dfrac{\mathbf{e}^x}{y^2} \end{array}}$$

10. `(CUBES uniquement)` Établir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0$$

- **3 pt : équivalence correctement démontrée (1 pt si une implication est faite mais pas la réciproque)**

11. `(CUBES uniquement)` En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, \mathrm{e})$.

- **1 pt : φ est continue et strictement croissante**
- **1 pt : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$ par thm de la bijection**
- **1 pt : $\varphi(1) = 0$ donc le réel 1 est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$ donc $(1, \mathrm{e})$ est l'unique point critique de f**

12. `(CUBES uniquement)` Est-ce que f admet un extremum local en $(1, \mathrm{e})$?

- **1 pt : $\nabla^2(f)(1, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{e}} \end{pmatrix}$**
- **1 pt : La matrice $\nabla^2(f)(1, \mathbf{e})$ est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f)(1, \mathbf{e})\right) = \left\{-\mathbf{e}, \frac{1}{\mathbf{e}}\right\}$**
- **1 pt : La matrice $\nabla^2(f)(1, \mathbf{e})$ admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. On en déduit que $(1, \mathbf{e})$ n'est pas un extremum local (c'est un point selle)**

13. `(CUBES uniquement)` Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

- **1 pt : La fonction f admet $(1, \mathrm{e})$ comme unique point critique sur U, qui est un ouvert**
- **1 pt : ce point n'est pas un extremum local, donc f n'admet pas d'extremum local sur U**

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

15. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

- **1 pt :** $u_n \in [3, +\infty[$ **donc on peut utiliser la question *5*.**
- **1 pt :** $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geqslant \mathrm{e} u_n \geqslant u_n$
- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$ **donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ **par théorème de comparaison**

16. Écrire un programme **Scilab** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

```
n = 0
u = 3
while u < 10 ^ 3
  u = exp(u) - u * exp(1/u)
  n = n + 1
end
disp(n)
```

- **1 pt :**

```
n = 0
u = 3
```

- **1 pt :**

```
while u < 10 ^ 3
```

- **1 pt :**

```
  u = exp(u) - u * exp(1/u)
  n = n + 1
```

- **1 pt :**

```
disp(n)
```

17. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$
- **1 pt : la série** $\sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ **est une série géométrique de raison** $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in \,]-1, 1[$**. C'est donc une série convergente.**
- **1 pt : Par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série** $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{u_n}$ **est convergente**

18. Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function S = sommeP(n)` qui, prend en argument un entier n et stocke dans la variable de sortie S le $n^{\text{ème}}$ terme de la somme partielle de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

```
function S = sommeP(n)
u = 3
S = 0
for k = 0:n
  S = S + u
  u = exp(u) - u * exp(1/u)
end
endfunction
```

- **1 pt : syntaxe fonction Scilab**
- **1 pt :**

```
u = 3
S = 0
```

- **1 pt :**

```
for k = 0:n
```

- **1 pt :**

```
  S = S + u
  u = exp(u) - u * exp(1/u)
```

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx$ est convergente.

- **1 pt : La fonction $x \mapsto x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur ce même intervalle donc I_n est une intégrale impropre en $+\infty$**
- **1 pt : $\forall x \in [1, +\infty[$, $x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$**
- **1 pt : $x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées**
- **1 pt : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. C'est donc une intégrale convergente.**
- **1 pt : Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx$ est convergente.**

2. a) Rappeler une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.
En déduire : $I_0 = a \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

- **1 pt : Une densité de X est : $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2}$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \, dx = 2 \int_0^{+\infty} f_X(x) \, dx$ car f_X est paire**

- **1 pt : Comme f_X est une densité :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$
- **1 pt :** $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx = a\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx = a\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} f_X(x)\,dx$

b) Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.
En déduire : $I_1 = a^2$.

- **1 pt : La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{a^2}\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^A x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx = -a^2\,\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a^2}} + a^2$

3. a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^t x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx = -a^2\,t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2\int_0^t x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx$$

- **1 pt : IPP bien choisie**

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^{n-1} & \quad & u'(x) & = & (n-1)x^{n-2} \\ v'(x) & = & x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \quad & v(x) & = & -a^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \end{array}\right.$$

- **1 pt : Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, t]$**
- **1 pt : calcul correct**

b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $I_n = (n-1)\,a^2\,I_{n-2}$.

- **1 pt : par croissances comparées :** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} = 0$
- **1 pt : on peut passer à la limite dans l'égalité de la question précédente puisque toutes les intégrales convergent**

c) Calculer I_2 et I_3.

- **1 pt :** $I_2 = a^3\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
- **1 pt :** $I_3 = 2a^4$

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Montrer que g_a est une densité.

- **1 pt : g_a est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0**
- **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) \geqslant 0$**
- **3 pt : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)\ dx$ converge et vaut 1**
  - **1 pt : La fonction g_a est nulle en dehors de $]0,+\infty[$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)\ dx = \int_0^{+\infty} g_a(x)\ dx$**
  - **1 pt : I_1 converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_a(x)\ dx$ aussi**
  - **1 pt : par linéarité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\ dx\ = 1$ car $I_1 = a^2$**

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

- **1 pt : g_a est nulle en dehors de $]0,+\infty[$ donc on peut considérer que $X(\Omega) =]0,+\infty[$**
- **1 pt : si $x \in]-\infty, 0]$, alors $F_X(x) = 0$**
- **2 pt : si $x \in]0,+\infty[$, alors $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$**

6. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que $\mathbb{E}(X) = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

- **1 pt : La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_a(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m g_a(t)\ dt$**
- **1 pt : La fonction g_a est nulle en dehors de $]0,+\infty[$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_a(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t\, g_a(t)\ dt$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, g_a(t)\ dt = \frac{1}{a^2}\ I_2$ et I_2 converge donc X admet une espérance**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, g_a(t)\ dt = \frac{1}{a^2}\ I_2$ donc $\mathbb{E}(X) = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$**

7. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathbb{V}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.

- **1 pt : La v.a.r. X admet une moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g_a(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m g_a(t)\ dt$**
- **1 pt : La fonction g_a est nulle en dehors de $]0,+\infty[$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g_a(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t^2\, g_a(t)\ dt$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, g_a(t)\ dt = \frac{1}{a^2}\ I_3$ et I_3 converge donc X admet un moment d'ordre 2 donc X admet une variance**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X^2) = 2a^2$**
- **1 pt : D'après la formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{4-\pi}{2}\ a^2$**

8. a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

- **1 pt : On note** $h : x \mapsto a\sqrt{-2\,\ln(x)}$ **de telle sorte que** $Z = h(U)$
- **1 pt :** $Z(\Omega) = [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \in\ ]-\infty, 0[$**,** $F_Z(x) = 0$
- **3 pt : si** $x \in\ ]-\infty, 0[$**,** $F_Z(x) = 1 - F_U\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right)$ **(1 pt calcul, 2 pt arguments)**
- **1 pt :** $0 < \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \leqslant 1$
- **1 pt :** $F_U : u \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si}\ u \in\ ]-\infty, 0] \\ u & \textbf{si}\ u \in\ ]0,1] \\ 1 & \textbf{si}\ u \in\ ]1, +\infty[\end{cases}$
- **1 pt : si** $x \in\ ]-\infty, 0[$**,** $F_Z(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$
- **1 pt : on reconnaît la fonction de répartition de la v.a.r.** X **et la fonction de répartition caractérise la loi.**

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function X = simulX(a)` qui prend en argument un réel a et permet de simuler la variable aléatoire X.
On rappelle que l'instruction `rand()` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1]$.

```
function X = simulX(a)
U = rand()
X = a * sqrt(-2 * log(u))
endfunction
```

- **1 pt : syntaxe fonction Scilab**
- **1 pt :**

```
U = rand()
```

- **1 pt :**

```
X = a * sqrt(-2 * log(u))
```

Vocabulaire de l'estimation

En statistiques, on définit la notion d'estimateur. C'est une fonction permettant d'évaluer un paramètre inconnu (souvent noté θ) d'une loi de probabilité. Sans entrer dans les détails, un estimateur peut par exemple servir à estimer certaines caractéristiques d'une population totale à partir de données obtenues par un sondage.

On définit comme suit le cadre de l'estimation.

Soit Z une variable aléatoire dont la loi dépend d'un paramètre inconnu θ.
Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Soit $(Z_1, \ldots, Z_n)$ un n-uplet de variables aléatoires et soit Y_n une variable aléatoire.
On donne les définitions suivantes.

- On dit que $(Z_1, \ldots, Z_n)$ est un n-échantillon de Z si :
  - × les variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$ sont indépendantes.
  - × les variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$ suivent toutes la même loi que Z.
- On dit que Y_n est un estimateur du paramètre θ si la variable aléatoire Y_n s'écrit comme une fonction (dont l'expression ne dépend pas de θ) des v.a.r. $Z_1, \ldots, Z_n$. Par exemple :
  - × $Y_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ est un estimateur de θ.
  - × $Y_n = Z_1 + \ldots + Z_n - (n-1)\,\theta$ n'est pas un estimateur de θ.
- Si un estimateur Y_n de θ admet une espérance, on appelle biais de Y_n le réel $b(Y_n)$ défini par :

$$b(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n) - \theta$$

  Dans le cas où $b(Y_n) = 0$ (c'est-à-dire $\mathbb{E}(Y_n) = \theta$), on dit que l'estimateur Y_n est sans biais.
- Si un estimateur Y_n de θ admet une variance, on appelle risque quadratique de Y_n le réel $r(Y_n)$ défini par :

$$r(Y_n) = \mathbb{E}\left((Y_n - \theta)^2\right)$$

9. On se place dans le cadre de l'estimation défini au-dessus.
En particulier, on considère $\theta \in \mathbb{R}$ et Y_n un estimateur du paramètre θ qui admet une variance.

a) Démontrer : $r(Y_n) = \mathbb{V}(Y_n) + \big(b(Y_n)\big)^2$.

- 1 pt : $r(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - 2\theta\mathbb{E}(Y_n) + \theta^2$

- 1 pt : linéarité de l'espérance citée

- 1 pt : $\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2$ **par Koenig-Huygens**

- 1 pt : $\big(b(Y_n)\big)^2 = (\mathbb{E}(Y_n))^2 - 2\theta\mathbb{E}(Y_n) + \theta^2$

b) On suppose dans cette question que Y_n est sans biais. Que vaut le risque quadratique de Y_n dans ce cas ?

- 1 pt : $r(Y_n) = \mathbb{V}(Y_n)$

Dans la suite, on considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \cdots, X_n$, suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X définie après la question *4*. On définit ainsi un n-échantillon de la variable aléatoire X.

10. On considère la variable aléatoire $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\,(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function A = simulA(a, n)` qui, prend en argument un réel a et un entier n et qui permet de simuler la variable aléatoire A_n.
On pourra se servir de la fonction `simulX` définie en ***8.b)*** ainsi que de la fonction `min` qui prend en paramètre une matrice et renvoie le plus petit coefficient de cette matrice.

```
function A = simulA(a,n)
A = 0
for k = 1:n
  A = A + simulX(a)
end
A = (sqrt(2)/(n ⋆ sqrt(%pi))) ⋆ A
endfunction
```

- **1 pt : syntaxe fonction Scilab**
- **1 pt : initialisation**

```
A = 0
```

- **1 pt : longueur boucle**

```
for k = 1:n
```

- **1 pt :**

```
  A = A + simulX(a)
```

- **1 pt :**

```
A = (sqrt(2)/(n ⋆ sqrt(%pi))) ⋆ A
```

b) Montrer que la variable aléatoire A_n, est un estimateur sans biais de a.

- **1 pt :** $A_n = f(X_1, \dots, X_n)$ **où la fonction** f **ne dépend pas du paramètre** a**. On en déduit que** A_n **est un estimateur de** a**.**
- **1 pt : La v.a.r.** A_n **admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(A_n) = a$
- **1 pt : linéarité de l'espérance citée**
- **1 pt :** X_1**, …,** X_n **ont même loi que** X

c) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur A_n.

- **1 pt :** $r(A_n) = \mathbb{V}(A_n)$ **car** A_n **est sans biais**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(A_n) = \dfrac{2}{n^2\,\pi}\ \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(A_n) = \dfrac{2}{n^2\,\pi}\ \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)$ **par indépendance de** X_1**, …,** X_n
- **1 pt :** $\mathbb{V}(A_n) = \dfrac{2}{n^2\,\pi}\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{4-\pi}{2}\ a^2\right)$ **car** X_1**, …,** X_n **ont même loi que** X
- **1 pt :** $r(A_n) \ = \ \dfrac{4-\pi}{\pi}\ \dfrac{a^2}{n}$

On définit la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

11. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function M = simulM(a, n)` qui, prend en argument un réel a et un entier n et qui permet de simuler la variable aléatoire M_n.
On pourra se servir de la fonction `simulX` définie en ***8.b)***.

```
function M = simulM(a,n)
T = zeros(1,n)
for k = 1:n
  T(k) = simulX(a)
end
M = min(T)
endfunction
```

- **1 pt : syntaxe fonction Scilab**
- **1 pt : initialisation**

```
T = zeros(1,n)
```

- **1 pt : longueur boucle**

```
for k = 1:n
```

- **1 pt : remplissage tableau**

```
  T(k) = simulX(a)
```

- **1 pt :**

```
M = min(T)
```

b) Montrer, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\mathbb{P}([M_n > t]) = e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.

- **1 pt :** $[M_n > t] \ = \ \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ [X_i > t]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([M_n > t]) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i > t])$ **par indépendance de** X_1**,** $\ldots$**,** X_n
- **1 pt :** $\mathbb{P}([M_n > t]) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X > t])$ **car** X_1**,** $\ldots$**,** X_n **ont même loi que** X
- **1 pt :** $\mathbb{P}([M_n > t]) = (1 - F_X(t))^n$
- **1 pt :** $F_X(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ **car** $t \in [0, +\infty[$
- **1 pt : l'égalité précédente est bien valable pour** $t = 0$ **car** $F_X(0) = 0$ **et** $1 - e^{-\frac{0^2}{2a^2}} = 0$

c) En déduire la fonction de répartition de M_n.

- **1 pt :** $X(\Omega) =]0, +\infty[$ **donc** $M_n(\Omega) =]0, +\infty[$
- **1 pt : si** $t \leqslant 0$**, alors** $F_{M_n}(t) = 0$
- **1 pt : si** $t > 0$**, alors** $F_{M_n}(t) = 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$

d) Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

- 1 pt : une v.a.r. Y de densité g_b admet comme fonction de répartition, d'après *5.* :

$$G_b : t \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } t \in]-\infty, 0] \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2b^2}} & \textbf{si } t \in]0, +\infty[\end{cases}$$

- 1 pt : En utilisant $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$, on remarque que $F_{M_n} = G_b$. Ainsi, M_n et Y ont même loi.

- 1 pt : Y étant à densité, M_n l'est aussi

- 1 pt : Y admettant la fonction g_b comme densité, on en déduit que M_n aussi

e) Montrer que la variable aléatoire M_n, admet une espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et une variance $\mathbb{V}(M_n)$. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{V}(M_n)$.

- 1 pt : La v.a.r. M_n admet pour densité la fonction g_b donc d'après les questions *6.* et *7.*, la v.a.r. Y admet une espérance et une variance

- 1 pt : D'après la question *6.* : $\mathbb{E}(M_n) \ = \ \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,n}}\ a$

- 1 pt : D'après la question *7.* : $\mathbb{V}(M_n) \ = \ \dfrac{4-\pi}{2}\ \dfrac{a^2}{n}$

12. ***a)*** En déduire un estimateur B_n sans biais de a, de la forme $\lambda_n \cdot M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

- 1 pt : La v.a.r. $B_n = \lambda_n\, M_n$ admet une espérance car la v.a.r. M_n en admet une

- 1 pt : $\mathbb{E}(\lambda_n\, M_n) = a \iff \lambda_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}$

- 1 pt : linéarité de l'espérance citée

- 1 pt : vérification que $B_n = \lambda_n M_n$ est bien un estimateur de a

b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur B_n.

- 1 pt : La v.a.r. B_n admet une variance car la v.a.r. M_n en admet une

- 1 pt : La v.a.r. B_n est sans biais donc $r(B_n) = \mathbb{V}(B_n)$

- 1 pt : $r(B_n) \ = \ \dfrac{4-\pi}{\pi}\ a^2$