DS6 (version B)

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.
Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont réels ou infinis.
On dit qu'une densité vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :

- × continue sur I ;
- × strictement positive sur I ;
- × nulle en dehors de I.

On écrira alors simplement : f est CSP(I).
On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires à densité.

Partie 1 - Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :

- × X une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans I, de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est CSP(I).
- × U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0, 1[$ et qui est indépendante de X.
- × h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, 1]$.

On se propose d'établir la formule suivante :

$$\mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) \ = \ \mathbb{P}([U < h(X)]) \ = \ \int_a^b \ f(t)\, h(t) \ dt$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\Psi(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)])$.

1. Pour tous réels x et y dans I tels que $x < y$, on pose $M(x, y) = \max\limits_{t\in[x,y]} \ h(t)$ et $m(x, y) = \min\limits_{t\in[x,y]} \ h(t)$.

a) Soit x dans I. Justifier que pour tout y dans l'intervalle $]x, b[$, il existe α_y dans l'intervalle $[x, y]$ tel que $M(x, y) = h(\alpha_y)$.

b) En déduire : $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} \ M(x, y) = h(x)$.

c) Montrer de même que, pour tout y dans I : $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} \ M(x, y) = h(y)$.

On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} \ m(x, y) = h(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} \ m(x, y) = h(y)$$

2. Soit x et y deux réels de I tels que $x < y$.

a) Établir l'inclusion suivante entre évènements :

$$[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \ \subset \ [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x, y)]$$

En déduire l'inégalité :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \ \leqslant \ (F(y) - F(x))\, M(x, y)$$

b) Établir une minoration analogue pour $\Psi(y) - \Psi(x)$, puis l'encadrement :

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x}\ m(x, y) \ \leqslant\ \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \ \leqslant\ \frac{F(y) - F(x)}{y - x}\ M(x, y)$$

c) Montrer que Ψ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée en fonction de f et h.

3. a) En déduire que, pour tout x et y dans I :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \ = \ \int_x^y f(t)\, h(t)\ dt$$

b) Établir : pour tout x dans I, $\Psi(x) \leqslant F(x)$, puis montrer : $\lim\limits_{x \to a} \Psi(x) = 0$. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad \Psi(x) = \int_a^x f(t)\, h(t)\ dt$$

c) Établir, pour tout x dans I : $\mathbb{P}([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = \mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) - \Psi(x)$.
En déduire : $\lim\limits_{x \to b} \Psi(x) = \mathbb{P}([U \leqslant h(X)])$ puis :

$$\mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) = \int_a^b f(t)\, h(t)\ dt$$

4. Montrer : $\mathbb{P}([U < h(X)]) = 1 - \mathbb{P}([1 - U \leqslant 1 - h(X)])$, en déduire :

$$\mathbb{P}([U < h(X)]) \ = \ \int_a^b f(t)\, h(t)\ dt$$

Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé

Soit α et β deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.
On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité S_1, S_2 et S_3.
On suppose que :

× pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.

× pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.

× pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.

On dira que ce modèle est *viable* s'il existe des quantités de productions x_1, x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1, S_2 et S_3, strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. a) Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{array} \right.$$

b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe une matrice colonne X à composantes strictement positives telle que la matrice colonne $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

6. ***a)*** Vérifier que $\alpha+\beta$ est valeur propre de A et déterminer le sous espace vectoriel associé.

b) En déduire que si $\alpha+\beta<1$, alors le modèle est viable.

On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $]-1,1[$.

7. ***a)*** Montrer que le modèle est viable si et seulement si $\alpha+\beta<1$.

b) Déterminer les valeurs propres de A autres que $\alpha+\beta$, et vérifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1,1[$.

8. On suppose, dans cette question seulement, que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$, admettant une densité de probabilité f qui est CSP($]0,1[$).
En utilisant les résultats de la **Partie 1**, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut $1-\mathbb{E}(\beta)$.

9. On suppose désormais que α et β sont tels que le modèle est viable. Pour $i=1,2$ ou 3, on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i, et y_i+z_i, le prix de vente d'une unité de bien du secteur i. La marge z_i est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant y_i.
On définit les deux matrices lignes : $Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}$ et $Z=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}$ ainsi que la matrice carrée $B=\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0\\ \alpha & 0 & \beta\\ 0 & \alpha & 0\end{pmatrix}$.

a) Établir la relation matricielle (1) : $Y=Y\,A+Z\,B$.

b) Justifier sans calculs l'inversibilité de I_3-A.
En déduire que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant la relation (1).

Partie 3 - Simulation de variables aléatoires

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En **Scilab** par exemple, on dispose de la fonction `rand`. Cette fonction simule une v.a.r. de loi uniforme sur $]0,1[$.

On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ce générateur aléatoire.

Jusqu'à la fin du problème : on note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I, de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

A - Simulation par la méthode d'inversion

10. ***a)*** On note H la restriction de G à I. Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0,1[$.
On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de H^{-1}.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
On pose $X=H^{-1}(U)$, et on note F la fonction de répartition de X.

b) Montrer que pour tout x dans I, $F(x)=G(x)$.

c) En déduire que X suit la même loi que Z.

11. Simulation de lois exponentielles.
On suppose dans cette question que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Expliciter l'intervalle I et les fonctions g, G et H^{-1}.

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function z = expo(lambda)` qui simule la loi exponentielle de paramètre `lambda`.

12. Simulation de la loi de Laplace.
On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|} \qquad \text{(densité de Laplace)}$$

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie $\mathbb{P}([V = -1]) = \mathbb{P}([V = 1]) = \dfrac{1}{2}$.
On pose $X = VY$.

a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}$).

b) Établir :

- pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}([X > x]) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y > x])$;
- pour tout $x \leqslant 0$, $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x])$;

c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X.

d) Conclure que X est une variable aléatoire continue admettant g comme densité.

e) Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la loi de Laplace :

```
function z = laplace()
  y = expo(1)
  v = rand()
  if ... then
    z = y
  else
    z = ...
  end
endfunction
```

B - Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g (voir les notations en préambule de la **Partie 3**), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que : $\forall x \in I$, $g(x) \leqslant c\, f(x)$.

13. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que, pour tout $x \in I$, $g(x) = c\, f(x)\, h(x)$.

On considère alors :

- une suite de variable aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui suivent une loi uniforme sur $]0, 1[$.
- une suite de variable aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ à valeur dans $]a, b[$ ayant toutes la même loi, de densité de probabilité f et de fonction de répartition F.

On suppose de plus que pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables $X_1, \ldots, X_n, U_1, \ldots, U_n$ sont mutuellement indépendantes.
On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

14. En utilisant la **Partie 1**, prouver l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([U_k \leqslant h(X_k)]) = \dfrac{1}{c}$.
En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N, c'est à dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

15. Soit $x \in I$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Exprimer l'événement $[X \leqslant x] \cap [N = n]$ à partir des événements $[X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

b) En utilisant la question ***3.b)***, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) = \frac{1}{c}\, G(x)$$

c) En déduire $\mathbb{P}([X_n \leqslant x] \cap [N = n])$ en fonction de c et de $G(x)$.

d) Montrer finalement : $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = G(x)$.

16. Conclure.

17. Simulation de la loi normale.
Dans cette question, Z suit la loi normale centrée réduite, donc $I = \mathbb{R}$.
Soit f la densité de Laplace (question ***12.***), définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

a) Donner une densité g de Z qui est CSP($\mathbb{R}$).

b) Étudier les variations sur $[0, +\infty[$ de la fonction $a : x \mapsto \mathrm{e}^{x - \frac{x^2}{2}}$.

c) Expliciter une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \geqslant 0$: $g(x) \ \leqslant\ \dfrac{c}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

d) En déduire, pour tout x réel : $g(x) \ \leqslant\ c\,f(x)$.

e) Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée réduite. On explicitera la fonction h introduite à la question ***13***.

f) Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :

```
function z = normale()
  x = laplace()
  u = rand()
  while ...
    x = laplace()
    u = rand()
  end
  z = ...
endfunction
```