

---

## DS8 (version A)

---

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

#### Partie 1

1. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2.
  - a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ .
  - b) Déterminer les points critiques de  $f$ .
3.
  - a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$ .
  - b) Vérifier que  $f$  ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global ?

#### Partie 2

On note  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x, 1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 4, l'équation  $g(x) = n$ , d'inconnue  $x$ , possède une unique solution que l'on notera  $u_n$ .
6. On note  $h$  la restriction de  $g$  à  $[1, +\infty[$ .
  - a) Déterminer le tableau de variations de  $h^{-1}$ .
  - b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
  - c) En déduire, en revenant à la définition de  $u_n$ , le réel  $\alpha$  pour lequel on a :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$ .

## Exercice 2

On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et on note  $\mathcal{B}$  la base  $(e_0, e_1, e_2)$  de  $E$ , où :  $e_0(X) = 1$ ,  $e_1(X) = X$  et  $e_2(X) = X^2$ .

On considère l'application, notée  $f$ , qui à tout polynôme  $P$  appartenant à  $E$ , associe le polynôme  $f(P)$  défini par :

$$(f(P))(X) = 2X P(X) - (X^2 - 1) P'(X)$$

1. a) Montrer que  $f$  est une application linéaire.  
b) En écrivant  $P(X) = a + bX + cX^2$ , définir explicitement  $(f(P))(X)$  puis en déduire que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .  
c) Écrire  $f(e_0)$ ,  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$  comme des combinaisons linéaires de  $e_0$ ,  $e_1$  et  $e_2$ , puis en déduire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
2. a) Vérifier que  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1, e_0 + e_2)$  et donner la dimension de  $\text{Im}(f)$ .  
b) Déterminer  $\text{Ker}(f)$ .
3. a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de  $A$ .  
b) En déduire que  $f$  est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de  $f$ .  
c) Vérifier que les sous-espaces propres de  $f$ , autres que  $\text{Ker}(f)$ , sont inclus dans  $\text{Im}(f)$ .

## Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

### Partie A : Loi de Pareto

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ a \frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres  $a$  et  $b$  lorsqu'elle admet pour densité la fonction  $f$ .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire  $X$  suivant la loi de Pareto de paramètres  $a$  et  $b$ .

2. Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .

3. a) Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

Montrer que la variable aléatoire  $bU^{-\frac{1}{a}}$  suit la loi de Pareto de paramètres  $a$  et  $b$ .

- b) En déduire une fonction **Scilab** d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels  $a$  et  $b$  strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire  $X$ .

- c) On considère la fonction **Scilab** ci-dessous.  
Que contient la liste  $L$  renvoyée par la fonction `mystere` ?

```

1  function L = mystere(a, b)
2      L = []
3      for p = 2 : 6
4          S = 0
5          for k = 1 : 10 ^ p
6              S = S + pareto(a, b)
7          end
8          L = [L, S / 10 ^ p]
9      end
10 endfunction

```

- d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de  $a$  et de  $b$ .  
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```

--> mystere(2,1)
ans =
    1.9306917    1.9411352    1.9840089    1.9977684    2.0012415
--> mystere(3,2)
ans =
    3.1050951    3.0142956    2.9849407    2.9931656    2.9991517
--> mystere(1,4)
ans =
    21.053151    249.58609    51.230522    137.64549    40.243918

```

4. a) Montrer que  $X$  admet une espérance si et seulement si  $a > 1$  et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{ab}{a-1}$$

- b) Montrer que  $X$  admet une variance si et seulement si  $a > 2$  et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

## Partie B : Estimation du paramètre $b$

On suppose **dans cette partie uniquement** que  $a = 3$  et on cherche à déterminer un estimateur performant de  $b$ .

Ainsi, la variable aléatoire  $X$  admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \frac{3b^3}{x^4} & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que  $X$ .  
On définit :

$$Y_n = \min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

On admet que  $Y_n$  et  $Z_n$  sont encore des variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

5. a) Calculer, pour tout  $x$  de  $[b, +\infty[$ ,  $\mathbb{P}([Y_n > x])$ .  
b) En déduire que  $Y_n$  suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.  
c) Montrer que  $Y'_n = \frac{3n-1}{3n} Y_n$  est un estimateur sans biais de  $b$ .  
Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
6. a) Déterminer l'espérance et la variance de  $Z_n$ .  
b) En déduire un estimateur noté  $Z'_n$  sans biais de  $b$  de la forme  $\alpha Z_n$  où  $\alpha$  est un réel à préciser.  
Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
7. Entre  $Y'_n$  et  $Z'_n$ , quel estimateur choisir ? Justifier.

### Partie C : Estimation du paramètre $a$

On suppose **dans cette partie uniquement** que  $b = 1$  et on cherche à construire un intervalle de confiance pour  $a$ .

Ainsi, la variable aléatoire  $X$  admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que  $X$ .

8. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose :  $W_n = \ln(X_n)$ .  
Montrer que la variable aléatoire  $W_n$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.  
En déduire l'espérance et la variance de  $W_n$ .
9. On définit, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$M_n = \frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n} \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n}(a M_n - 1)$$

- a) Justifier que la suite de variables aléatoires  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
- b) En déduire que l'intervalle  $\left[ \frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n} M_n} ; \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n} M_n} \right]$  est un intervalle de confiance asymptotique pour  $a$  au niveau de confiance 95%.  
On admettra que  $\Phi(2) \geq 0,975$ , où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

## Problème

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et Face avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

### Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire  $X$  prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements  $[X = 0]$ ,  $[X = 1]$ ,  $[X = 2]$  puis calculer leurs probabilités.

b) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$ .

### Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre  $n$  de Face obtenus, on place  $n + 1$  boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à  $n$  et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note  $U$  la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose :  $V = X - U$ .

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable  $U$ .

b) Déterminer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $U$  sachant  $[X = n]$ .

c) En déduire, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

d) Montrer que  $U$  admet une espérance et une variance et les calculer.

3. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable  $V$ .

b) Déterminer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $V$  sachant  $[X = n]$ .

c) En déduire la loi de  $V$ .

4. Montrer que les variables aléatoires  $U$  et  $V$  sont indépendantes.

5. Que vaut  $\text{Cov}(U, V)$  ? En déduire  $\text{Cov}(X, U)$  ?

### Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie,  $p$  désigne un réel de  $]0, 1[$ .

Deux individus  $A$  et  $B$  s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur  $A$  dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note  $X$  la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur  $B$  dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité  $p$  et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note  $Y$  la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur  $A$  gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de  $B$  ; sinon c'est le joueur  $B$  qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs  $A$  et  $B$  ont la même probabilité de gagner.

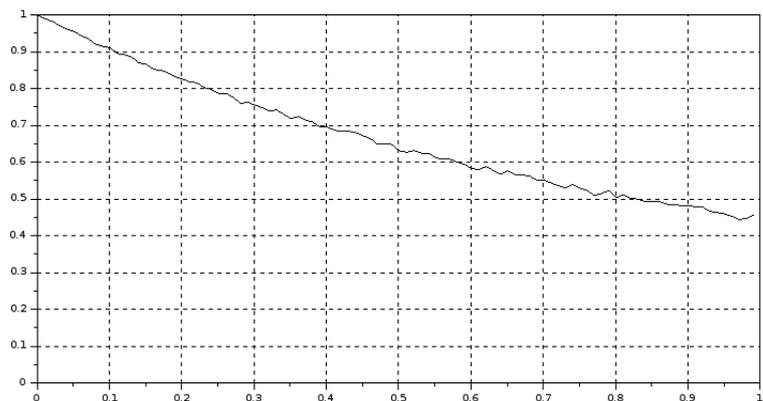
### 6. Simulation informatique

- a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la v.a.r.  $X$ .
- b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel  $p$  de  $]0, 1[$ , simule la variable aléatoire  $Y$ . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```

1  function r = mystere(p)
2      r = 0
3      N = 10 ^ 4
4      for k = 1:N
5          x = simule_X()
6          y = simule_Y(p)
7          if x <= y then
8              r = r + 1/N
9          end
10     end
11 endfunction
    
```

- c) On trace, en fonction de  $p$ , une estimation de la probabilité que  $A$  gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de  $p$  pour laquelle le jeu serait équilibré.

### 7. Étude de la variable aléatoire $Y$

On note  $Z$  la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur  $B$ .

- a) Reconnaître la loi de  $Z$  et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
- b) Exprimer  $Y$  à l'aide de  $Z$  et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de  $Y$  et préciser leurs valeurs.
- c) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Y \geq n]) = (1 - p)^n$ .
8. a) Montrer :  $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y \geq n])$ .

b) Déduire des résultats précédents :  $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{(2 + p)^2}$ .

- c) Déterminer la valeur de  $p$  pour lequel le jeu est équilibré.