DS8 (version A)

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) \ = \ x^3 + y^3 - 3xy$$

Partie 1

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

- 1 pt : f est polynomiale

2. *a)* Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

- 1 pt : $\partial_1(f)(x,y) = 3x^2 - 3y$

- 1 pt : $\partial_2(f)(x,y) = 3y^2 - 3x$

b) Déterminer les points critiques de f.

- 1 pt : $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = x \end{cases}$

- 1 pt : $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ **ou** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

3. *a)* Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

- 1 pt : $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 6x$

- 1 pt : $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 6y$

- 1 pt : $\partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -3$

- 1 pt : $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = -3$

b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

- 1 pt : $\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(0,0)) = \{-3, 3\}$

- 1 pt : les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont non nulles et de signes opposés donc $(0,0)$ est un point selle : ce n'est pas un extremum local de f

- 1 pt : $\nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(1,1)) = \{3, 9\}$

- 1 pt : les valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,1)$ sont strictement positives donc $(0,0)$ est un minimum local

4. Cet extremum est-il global ?

- 1 pt : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x) = +\infty$ donc f n'admet pas de maximum global

- 1 pt : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,x) = -\infty$ donc f n'admet pas de minimum global

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \ = \ f(x, 1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.

- **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 3x + 1$**
- **1 pt : la fonction g est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 3$**
- **2 pt : (1 pt pour $g(-1)$ et $g(1)$)**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt : d'après le tableau de variations, pour tout $x < 1$, $g(x) \leqslant 3 < n$ donc l'équation $g(x) = n$ n'admet pas de solutions sur $]-\infty, 1[$**
- **1 pt : la fonction g est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$**
- **1 pt : $n \in [-1, +\infty[$ donc n admet un unique antécédent par la fonction g dans $[1, +\infty[$: l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$**

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.

a) Déterminer le tableau de variations de h^{-1}.

- **1 pt : h^{-1} possède la même stricte monotonie que h donc h^{-1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$**
- **1 pt :**

x	-1		$+\infty$
Variations de h^{-1}	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = g(u_n) = h(u_n)$ (car $u_n \geqslant 1$)**
- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h^{-1}(n) = u_n$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} h^{-1}(n) = \lim\limits_{x \to +\infty} h^{-1}(x) = +\infty$**

c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^\alpha$.

- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = u_n^3 - 3u_n + 1$**
- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{u_n^3} = 1 - \frac{3}{u_n^2} + \frac{1}{u_n^3}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{u_n^3} = 1$ (cf question précédente)**
- **1 pt : $u_n^3 \underset{n \to +\infty}{\sim} n$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$**

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathscr{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où : $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X^2$ et $e_2(X) = X^2$.
On considère l'application, notée f, qui à tout polynôme P appartenant à E, associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = 2X\,P(X) - (X^2-1)\;P'(X)$$

1. a) Montrer que f est une application linéaire.

- **- 2 pt :** $f(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$ **(1 pt pour la méthode même en cas d'erreur de calcul, mais pas en cas d'arnaque)**

b) En écrivant $P(X) = a + b\,X + c\,X^2$, définir explicitement $\big(f(P)\big)(X)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.

- **- 1 pt :** $\big(f(P)\big)(X) = b + (2a+2c)X + b\,X^2$
- **- 1 pt :** $\big(f(P)\big)(X) \in E$ **donc** f **est à valeurs dans** E **donc** f **est un endomorphisme de** E **(cf question précédente)**

c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

- **- 1 pt :** $f(e_0) = 2e_1$ **donc** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **- 1 pt :** $f(e_1) = e_0 + e_2$ **donc** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_0)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **- 1 pt :** $f(e_2) = 2e_1$ **donc** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **- 1 pt : Par concaténation, on obtient** $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. a) Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

- **- 1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_0), f(e_1), f(e_2))$
- **- 1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_0 + e_2)$
- **- 2 pt : la famille** $(e_1, e_0 + e_2)$ **est une base de** $\mathrm{Im}(f)$ **(1 pt libre, 1 pt génératrice)**
- **- 1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Card}((e_1, e_0 + e_2)) = 2$

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

- **- 3 pt :** $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_0 - e_2)$ **découpés en**
  - **- 1 pt : écriture système**
  - **- 1 pt : résolution système**
  - **- 1 pt : conclusion**

  ou
  - **- 1 pt : calcul de** $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ **par le théorème du rang**
  - **- 1 pt :** $f(e_0 - e_2) = 0_E$
  - **- 1 pt :** $(e_0 - e_2)$ **est une base de** $\mathrm{Ker}(f)$

3. a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A.

- **3 pt :** $\text{Sp}(A) = \{0, 2, -2\}$ **découpés en**
  - **1 pt : méthode correcte (pas de pivot qui dépend de** λ**)**
  - **1 pt : une matrice triangulaire est non inversible ssi l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul**
  - **1 pt : calculs corrects**

b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.

- **1 pt :** $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{0, 2, -2\}$ **car** $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$
- **1 pt :** f **possède** 3 **valeurs propres distinctes et** $\dim(E) = 3$ **donc** f **est diagonalisable**
- **1 pt :** $E_0(f) = \text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(e_0 - e_2)$
- **3 pt :** $E_2(f) = \text{Vect}\,(e_0 + 2 \cdot e_2 + e_2)$ **(1 pt système, 1 pt résolution, 1 conclusion)**
- **3 pt :** $E_{-2}(f) = \text{Vect}\,(e_0 - 2 \cdot e_1 + e_2)$ **(1 pt système, 1 pt résolution, 1 conclusion)**

c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\text{Ker}(f)$, sont inclus dans $\text{Im}(f)$.

- **1 pt : méthode de démonstration correcte. Soit** $P \in E_\lambda(f)$ **(avec** $\lambda \in \{-2, 2\}$**), montrons que** $P \in \text{Im}(f)$
- **1 pt : calcul correct**

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ a \, \dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

- **1 pt :** f **est continue sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** b
- **1 pt : pour tout** $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$
- **4 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ **converge et vaut** 1
  - × **1 pt : La fonction** f **est nulle en dehors de** $[b, +\infty[$**, donc** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_b^{+\infty} f(x)\ dx = \int_b^{+\infty} a\ \frac{b^a}{x^{a+1}}\ dx$
  - × **1 pt : la fonction** $x \mapsto a\ \dfrac{b^a}{x^{a+1}}$ **est continue sur** $[b, +\infty[$ **donc** $\displaystyle\int_b^{+\infty} a\ \frac{b^a}{x^{a+1}}\ dx$ **est impropre en** $+\infty$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\int_b^B f(x)\ dx = -b^a \left(\frac{1}{B^a} - \frac{1}{b^a}\right) = 1 - \frac{b^a}{B^a}$
  - × **1 pt : comme** $a > 0$ **:** $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{1}{B^a} = 0$**.**

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

- **1 pt : f est nulle en dehors de $[b,+\infty[$, donc on peut considérer $X(\Omega)=[b,+\infty[$**
- **1 pt : si $x\in\,]-\infty,b[$, alors $F_X(x)=0$**
- **2 pt : si $x\in\ [b,+\infty[$, alors $F_X(x)=\ 1-\left(\dfrac{b}{x}\right)^a$**

3. ***a)*** Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$.
Montrer que la variable aléatoire $b\,U^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

- **1 pt : On note $h : x\mapsto bx^{-\frac{1}{a}}$ de telle sorte que $Y=b\,U^{-\frac{1}{a}}=h(U)$**
- **1 pt : $Y(\Omega)=[b,+\infty[$**
- **1 pt : si $x\in\,]-\infty,b[$, $F_Y(x)=0$**
- **3 pt : si $x\in\ [b,+\infty[$, $F_Y(x)=1-F_U\left(\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\right)$ (1 pt calcul, 2 pt arguments)**
- **1 pt : $0\ <\ \left(\dfrac{b}{x}\right)^a\ \leqslant\ 1$**
- **1 pt : $F_U : u\mapsto \begin{cases}0 & \textbf{si } u\in\,]-\infty,0]\\ u & \textbf{si } u\in\,]0,1]\\ 1 & \textbf{si } u\in\,]1,+\infty[\end{cases}$**
- **1 pt : si $x\in\,]0,+\infty[$, $F_Y(x)=1-\left(\dfrac{b}{x}\right)^a$**
- **1 pt : on reconnaît la fonction de répartition de la v.a.r. X et la fonction de répartition caractérise la loi.**

b) En déduire une fonction **Scilab** d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```
1 function X = pareto(a, b)
2     U = rand()
3     X = b ⋆ (U. ^ (-1/a))
4 endfunction
```

- **1 pt : ligne 2**
- **1 pt : ligne 3**

c) On considère la fonction **Scilab** ci-dessous.
Que contient la liste `L` renvoyée par la fonction `mystere` ?

```
function L = mystere(a, b)
    L = []
    for p = 2 : 6
        S = 0
        for k = 1 : 10^p
            S = S + pareto(a,b)
        end
        L = [L, S / 10^p]
    end
endfunction
```

- **1 pt : La variable `L` est un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$ où X suit une loi de Pareto de paramètres `a` et `b`**
- **1 pt : explications pertinentes**

d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b.
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
--> mystere(2,1)
    ans =
        1.9306917   1.9411352   1.9840089   1.9977684   2.0012415
--> mystere(3,2)
    ans =
        3.1050951   3.0142956   2.9849407   2.9931656   2.9991517
--> mystere(1,4)
    ans =
        21.053151   249.58609   51.230522   137.64549   40.243918
```

- **1 pt : L'instruction `mystere(2,1)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1. Les 5 valeurs affichées semblent être de plus en plus proche de 2.**

  On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1, alors : $\mathbb{E}(X) = 2$.

- **1 pt : L'instruction `mystere(3,2)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2. Les 5 valeurs affichées semblent être de plus en plus proche de 3.**

  On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2, alors : $\mathbb{E}(X) = 3$.

- **1 pt : L'instruction `mystere(1,4)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4. Les 5 valeurs affichées ne semblent pas converger vers une valeur en particulier.**

  On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4, alors elle n'admet pas d'espérance.

4. ***a)*** Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) \ = \ \frac{a\,b}{a-1}$$

- **1 pt : La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\ f(x)\ dx$.**
- **1 pt : Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx \ = \ \int_{b}^{+\infty} x\ f(x)\ dx = a\,b^a \int_{b}^{+\infty} \frac{1}{x^a}\ dx$$

- **1 pt : $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} \frac{1}{x^a}\ dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ $(b > 0)$, d'exposant a. Elle est donc convergente si et seulement si $a > 1$.**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{b}^{B} x\ f(x)\ dx = -\frac{a\ b^a}{a-1}\left(\frac{1}{B^{a-1}} - \frac{1}{b^{a-1}}\right)$**
- **1 pt : Comme $a - 1 > 0$: $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{1}{B^{a-1}} = 0$**

b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \frac{a\,b^2}{(a-1)^2\,(a-2)}$$

- **1 pt : La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\ f(x)\ dx$.**
- **1 pt : Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx \ = \ \int_{b}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx = \ a\,b^a \ \int_{b}^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}}\ dx$$

- **1 pt : $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}}\ dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ $(b > 0)$, d'exposant $a-1$. Elle est donc convergente si et seulement si $a - 1 > 1$.**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{b}^{B} x^2\ f(x)\ dx = -\frac{a\,b^a}{a-2}\ \left(\frac{1}{B^{a-2}} - \frac{1}{b^{a-2}}\right)$**
- **1 pt : Comme $a - 2 > 0$: $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{1}{B^{a-2}} = 0$**
- **1 pt : si $a > 2$: $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{a\,b^2}{a-2}$**
- **1 pt : Par la formule de Kœnig-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X) \ = \ \dfrac{a\,b^2}{(a-1)^2\,(a-2)}$ sans arnaque**

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on chercher à déterminer un estimateur performant de b.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \dfrac{3\,b^3}{x^4} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, …, X_n des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.
On définit :

$$Y_n \;=\; \min(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

5. a) Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $\mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \,[X_k > x]\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\,[X_k > x]\,)$ **(car les v.a.r.** X_1, …, X_n **sont indépendantes)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) = (1 - F_X(x))^n$ **(car les v.a.r.** X_1, …, X_n **ont même loi que** X**)**
- **1 pt :** $F_X(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^3$ **car** $x \geqslant b$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) = \left(\dfrac{b}{x}\right)^{3n}$

b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

- **1 pt :** $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $X_k(\Omega) = [b, +\infty[$ **donc** $Y_n(\Omega) \subset [b, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \in\,]-\infty, b[$, $F_{Y_n}(x) = 0$
- **1 pt : si** $x \in [b, +\infty[$, $F_{Y_n}(x) = 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^{3n}$
- **1 pt : D'après la question *2.*, on reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi de Pareto de paramètres** $3n$ **et** b

c) Montrer que $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n}\; Y_n$ est un estimateur sans biais de b.

Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

- **1 pt : La v.a.r.** $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n} Y_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, \min(X_1, \ldots, X_n)$ **s'exprime :**
  - × **à l'aide d'un** n**-échantillon** $(X_1, \ldots, X_n)$ **de la v.a.r.** X**,**
  - × **sans mention du paramètre** b**.**

  La v.a.r. Y'_n **est donc un estimateur de** b
- **1 pt : Comme** $3n \geqslant 3 > 1$**, d'après la question *4.a)*, la v.a.r.** Y_n **admet une espérance**
- **1 pt : la v.a.r.** Y'_n **admet une espérance (donc un biais) en tant que transformée linéaire d'une v.a.r. qui en admet une**
- **1 pt : linéarité de l'espérance citée**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{3n\,b}{3n-1}$ **d'après les questions *4.a)* et *5.b)***
- **1 pt : Comme** $3n \geqslant 3 > 2$**, d'après la question *4.b)*, la v.a.r.** Y_n **admet une variance**

- **1 pt : la v.a.r.** Y_n' **admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que transformée linéaire d'une v.a.r. qui en admet une**
- **1 pt : par décomposition biais-variance,** $r_b(Y_n') = \mathbb{V}(Y_n')$
- **1 pt :** $r_b(Y_n') = \dfrac{b^2}{3n\,(3n-2)}$

6. a) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

- **1 pt : La v.a.r.** Z_n **admet une variance (donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$ **(par linéarité de l'espérance)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{3}{2}\, b$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(V_n) = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$ **(car les v.a.r.** X_1**, ...,** X_n **sont indépendantes)**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z_n) = \dfrac{3\,b^2}{4n}$

b) En déduire un estimateur noté Z_n' sans biais de b de la forme $\alpha\, Z_n$ où α est un réel à préciser. Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

- **1 pt : La v.a.r.** $Z_n' = \alpha\, Z_n = \dfrac{2}{3}\, Z_n$ **s'exprime :**
  × **à l'aide d'un** n**-échantillon** $(X_1, \ldots, X_n)$ **de la v.a.r.** X**,**
  × **sans mention du paramètre** b**.**
  La v.a.r. $Z_n' = \dfrac{2}{3}\, Z_n$ **est donc un estimateur de** b**.**
- **1 pt : La v.a.r.** Z_n' **admet une espérance (donc un biais) en tant que transformée linéaire de la v.a.r.** Z_n **qui en admet une**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_n') = b$
- **1 pt : La v.a.r.** Z_n' **admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que transformée linéaire de la v.a.r.** Z_n **qui en admet une**
- **1 pt :** $r_b(Z_n') = \dfrac{b^2}{3n}$

7. Entre Y_n' et Z_n', quel estimateur choisir ? Justifier.

- **2 pt :** $r_b(Y_n') \leqslant r_b(Z_n') \iff 3n \geqslant 3$ **et cette dernière inégalité est vraie car** $n \in \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** Y_n' **est un meilleur estimateur de** b **que** Z_n'

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 1 \\[2mm] \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{array} \right.$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance et la variance de W_n.

- **1 pt : On note** $h : x \mapsto \ln(x)$ **de telle sorte que** $W_n = h(X_n)$
- **1 pt :** $W_n(\Omega) = [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \in \,]-\infty, 0[$**,** $F_{W_n}(x) = 0$
- **1 pt : si** $x \in \,[0, +\infty[$**,** $F_{W_n}(x) = F_{X_n}(\mathrm{e}^x)$
- **1 pt : comme** $x \geqslant 0$**,** $\mathrm{e}^x \geqslant 1 = b$
- **1 pt : si** $x \in \,[0, +\infty[$**,** $F_{W_n}(x) = 1 - \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^a = 1 - \mathrm{e}^{-ax}$
- **1 pt : On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit une loi** $\mathcal{E}(a)$**. Or la fonction de répartition caractérise la loi.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(W_n) = \dfrac{1}{a}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(W_n) = \dfrac{1}{a^2}$

9. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n \;=\; \frac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sqrt{n}\,(a\,M_n - 1)$$

a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{a}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{1}{n\,a^2}$
- **1 pt :** $\overline{W}_n^* = T_n$
- **3 pt : hypothèses TCL. La suite** $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **est une suite de v.a.r.**
  - × **1 pt : indépendantes par lemme des coalitions (car la suite** $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **est une suite de v.a.r. indépendantes)**
  - × **1 pt : de même loi** $\mathcal{E}(a)$
  - × **1 pt : qui admettent une variance non nulle** $\dfrac{1}{a^2}$

b) En déduire que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n}\ ;\ \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
On admettra que $\Phi(2) \geqslant 0,975$*, où* Φ *désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.*

- **2 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \;\leqslant\; a \;\leqslant\; \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]\right) = \mathbb{P}\left([-2 \;\leqslant\; T_n \;\leqslant\; 2]\right)$
- **1 pt :** $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} Z$**, où** $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ **donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left([-2 \leqslant T_n \leqslant 2]\right) = \mathbb{P}(\,[-2 \leqslant Z \leqslant 2]\,)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[-2 \leqslant Z \leqslant 2]\,) = 2\,\Phi(2) - 1$
- **1 pt :** $\Phi(2) \geqslant 0,975$ **donc** $2\,\Phi(2) - 1 \geqslant 0,95$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \;\leqslant\; a \;\leqslant\; \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]\right) \;\geqslant\; 95\%$ **d'où le résultat**

Problème

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. ***a)*** Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\,\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. ***a)*** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\,\mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

3. ***a)*** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

c) En déduire la loi de V.

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

5. Que vaut $\text{Cov}(U, V)$? En déduire $\text{Cov}(X, U)$?

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

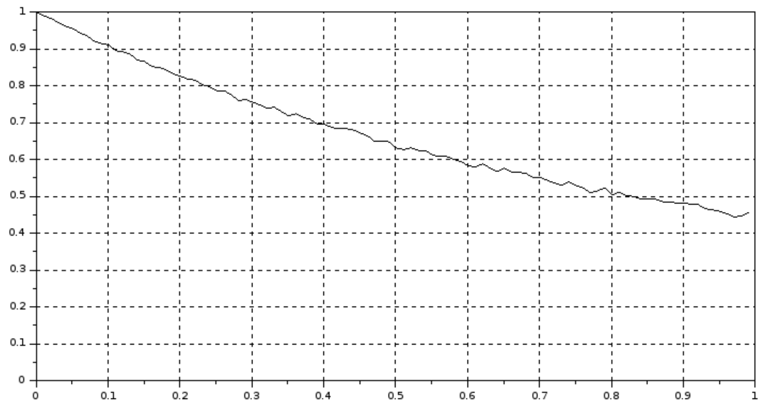
6. Simulation informatique

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la v.a.r. X.

b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0,1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
    r = 0
    N = 10^4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
    end
endfunction
```

c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

8. *a)* Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.