DS8 (version B)

EXERCICE

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (`ans`) **Scilab** suivantes :

```
B = [0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P = [1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P) ⋆ B ⋆ P
```

```
ans  =
    1.   0.   0.
    0. - 1.   0.
    0.   0.   1.
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Scilab** précédente.

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3. ***a)*** Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :
- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + \text{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \text{id})$;
- p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = \text{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \text{id})$ est incluse dans F.

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.
On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \dots, f_p,\ g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de E.

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

PROBLÈME

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.

Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. ***a)*** Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $]0,1]$.

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \dfrac{b}{2}x^2 = y$.

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.
Quelle est, pour tout $u \in [0,1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1-u)$?

2. ***a)*** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\, dx$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}b\left(x + \dfrac{a}{b}\right)^2\right)$.
Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Déduire de la question ***2.b)***, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a,b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\, dx$.

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)$.

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1-U)$.

5. La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
1 function x = grandlinexp(a,b,n)
2     u = rand(n,1)
3     y = ...........
4     x = (-a + sqrt(a^2 + 2 * b * y)) / b
5 endfunction
```

a) Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?

b) Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
for k = 1:6
    mean(grandlinexp(0, 1, 10^k)
end
```

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ dont les paramètres $a>0$ et $b>0$ sont inconnus.
Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une « cohorte » de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n=\min(X_1,X_2,\dots,X_n),\quad H_n=\min(h,X_1,X_2,\dots,X_n)\quad\text{et}\quad U_n=nH_n.$$

7. Calculer pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n\geqslant x])$.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $F_{U_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\exp\left(-ax-\dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0\leqslant x<nh\\ 1 & \text{si } x\geqslant nh\end{cases}$.

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

9. Soit $\alpha\in\,]0,1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c\leqslant Y\leqslant d])=1-\alpha\quad\text{et}\quad\mathbb{P}([Y\leqslant c])=\frac{\alpha}{2}$$

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}\,,\,\dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit S_i et D_i les variables aléatoires telles que :

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\overline{S}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ et $\overline{D}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$.

10. ***a)*** Justifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h)$ et calculer $\mathbb{E}(S_i D_i)$.

b) Pour quels couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont-elles indépendantes ?

c) Déduire des questions précédentes l'expression de la covariance $\text{Cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n)$ de $\overline{S}_n$ et $\overline{D}_n$ en fonction de n, $G_{a,b}(h)$ et $G_{a,b}(1)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

11. ***a)*** Montrer que $\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

b) De quel paramètre, $\overline{D}_n$ est-il un estimateur sans biais et convergent ?

12. On pose : $z(a, b) = \ln(G_{a,b}(1))$ et $r(a, b) = \ln(G_{a,b}(h))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \ln\left(1 - \overline{D}_n + \dfrac{1}{n}\right)$ et $R_n = \ln\left(\overline{S}_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

On admet que Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a, b)$ et $r(a, b)$ respectivement.

a) Soit ε, λ et μ des réels strictement positifs.

(i) Justifier l'inclusion suivante :

$$[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda |Z_n - z(a,b)| + \mu |R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon] \,.$$

(ii) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}\big([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon] \big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\Big[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\Big] \Big) + \mathbb{P}\Big(\Big[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\Big] \Big).$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = \dfrac{2}{h-1} Z_n - \dfrac{2}{h(h-1)} R_n$.

Montrer que B_n est un estimateur convergent du paramètre b.