Devoir d'entraînement

À tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ où a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \left\{ M(a,b,c) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

I. Recherche d'une base de E

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 3.

2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

II. Cas particulier de la matrice $M\left(1,2,3\right)$

3. Donner les valeurs propres de $M(1, 2, 3)$.

4. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(1,2,3) = PDP^{-1}$$

5. Donner l'expression de P^{-1} et en déduire la matrice $\big(M(1,2,3)\big)^n$ en fonction de l'entier naturel n.

III. Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 1)$

On pose $J = M(1, 1, 1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

6. Donner les valeurs propres de la matrice $M(1, 1, 1)$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

7. Calculer les matrices J^2, J^3. En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

8. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$:

$$\big(M(1,1,1)\big)^n = I_3 + n\,J + \frac{n(n-1)}{2}\,J^2$$

9. En déduire l'écriture matricielle de $\big(M(1,1,1)\big)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV. Cas particulier de la matrice $M(1,1,2)$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $M(1,1,2)$. On définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (u, v, w)$ par :

$$u = (1,0,0),\ v = (0,1,0),\ w = (2,1,1)$$

10. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

11. Prouver que les vecteurs u et w sont deux vecteurs propres de f associés à deux valeurs propres que l'on précisera.

12. Exprimer $f(v)$ comme combinaison linéaire des vecteurs u et v. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.

13. Montrer que pour tout entier naturel n : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

14. Montrer que la matrice de passage de R de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ a pour matrice inverse la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Donner une relation reliant les matrices $M(1,1,2)$, Q, R et T.

16. Sans l'expliciter, écrire $\big(M(1,1,2)\big)^n$ en fonction de n, Q, R, T.