Devoir d'entraînement

À tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ où a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \left\{ M(a,b,c) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

I. Recherche d'une base de E

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 3.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{M(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ a \cdot M(1,0,0) + b \cdot M(0,1,0) + c \cdot M(0,0,1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1)) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

- Ici, E est un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Il y a tout lieu de penser que cet ensemble va pouvoir facilement s'écrire comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Cette méthode présente un double avantage. En effet, en plus de démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on obtient de plus que famille $\big(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1)\big)$ est génératrice de E.

Commentaire

- Si la rédaction précédente est celle attendue, il arrive parfois qu'on ne puisse pas l'utiliser (dans certains cas, l'ensemble étudié ne s'écrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie). Il est donc important de savoir utiliser la méthode consistant à revenir à la définition de sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $E \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(ii) $E \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = M(0,0,0) \in E$.

(iii) Démontrons que E est stable par combinaison linéaire.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(U_1, U_2, U_3) \in E^3$.

- × Comme $U_1 \in E$, il existe $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U_1 = M(a_1, b_1, c_1)$.
- × Comme $U_2 \in E$, il existe $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U_2 = M(a_2, b_2, c_2)$.
- × Comme $U_3 \in E$, il existe $(a_3, b_3, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U_3 = M(a_3, b_3, c_3)$.

Démontrons que $\lambda_1 \cdot U_1 + \lambda_2 \cdot U_2 + \lambda_3 \cdot U_3 \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot U_1 + \lambda_2 \cdot U_2 + \lambda_3 \cdot U_3 \\
= \ & \lambda_1 \cdot M(a_1, b_1, c_1) + \lambda_2 \cdot M(a_2, b_2, c_2) + \lambda_3 \cdot M(a_3, b_3, c_3) \\
= \ & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ 0 & b_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 & a_2 & a_2 \\ 0 & b_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} a_3 & a_3 & a_3 \\ 0 & b_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 & \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 & \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \\ 0 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \\ 0 & 0 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 \end{pmatrix} \\
= \ & M(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3, \ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 a_3, \ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3) \in E
\end{aligned}$$

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

□

2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

Démonstration.
Dans la question précédente, on a démontré que la famille $\big(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1)\big)$ est génératrice de E. Démontrons maintenant qu'elle est libre.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons : $\lambda_1 \cdot M(1,0,0) + \lambda_2 \cdot M(0,1,0) + \lambda_3 \cdot M(0,0,1) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ $(*)$.

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La famille } \big(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1)\big) \text{ est libre.}}$$

- La famille $\big(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1)\big)$ est :
  - × génératrice de E d'après le point précédent,
  - × libre.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1)\big) \text{ est une base de } E.}$$

- Enfin :

$$\dim(E) = \mathrm{Card}\left(\big(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1)\big)\right) = 3$$

$$\boxed{\dim(E) = 3}$$

□

II. Cas particulier de la matrice $M\,(1,2,3)$

3. Donner les valeurs propres de $M(1,2,3)$.

Démonstration.
La matrice $M(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire (supérieure).
Ainsi, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Sp}\big(M(1,2,3)\big) = \{1,2,3\}.}$$

□

4. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(1,2,3) = PDP^{-1}$$

Démonstration.

- La matrice $M(1,2,3)$:
  - × est carrée d'ordre 3.
  - × possède 3 valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M(1,2,3) \text{ est diagonalisable.}}$$

- Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M(1,2,3) = P\,D\,P^{-1}$.
  Plus précisément :
  - × la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de $M(1,2,3)$.
  - × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $M(1,2,3)$ (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres). Ainsi :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  Il reste alors à déterminer les sous-espaces propres de $M(1,2,3)$.

- Déterminons $E_1\big(M(1,2,3)\big)$ le sous-espace propre de $M(1,2,3)$ associé à la valeur propre 1.

  Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
U \in E_1\big(M(1,2,3)\big) & \Longleftrightarrow & \big(M(1,2,3) - I\big) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 0 \\ y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rrcl} y & & = & 0 \\ & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_1\big(M(1,2,3)\big) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid y = 0 \ \text{ et } \ z = 0 \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_1\big(M(1,2,3)\big) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).}$$

- Déterminons $E_2\big(M(1,2,3)\big)$ le sous-espace propre de $M(1,2,3)$ associé à la valeur propre 2.

  Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
U \in E_2\big(M(1,2,3)\big) & \Longleftrightarrow & \big(M(1,2,3) - 2\,I\big) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & z & = & -y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & & & = & -y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_2\big(M(1,2,3)\big) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid x = y \ \text{ et } \ z = 0 \right\} \\[4mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\[4mm]
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\[4mm]
& = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_2\big(M(1,2,3)\big) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).}$$

- Déterminons $E_3\big(M(1,2,3)\big)$ le sous-espace propre de $M(1,2,3)$ associé à la valeur propre 3.

  Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
U \in E_3\big(M(1,2,3)\big) & \Longleftrightarrow & \big(M(1,2,3) - 3\,I\big) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -\,z \\ & - & y & = & -2\,z \end{array} \right. \\[6pt]
& \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & & & = & -3\,z \\ & - & y & = & -2\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_3\big(M(1,2,3)\big) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid x = \frac{3}{2}\,z \ \text{ et } \ y = 2\,z \right\} \\[6pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,z \\ 2\,z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[6pt]
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[6pt]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\[6pt]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_3\big(M(1,2,3)\big) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right).}$$

- Ainsi, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On a bien trouvé } P \text{ et } D \text{ telles que : } M(1,2,3) = P\,D\,P^{-1}.}$$

□

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 2$ et $A = M(1,2,3)$.
  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2\big(M(1,2,3)\big)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $\big(M(1,2,3) - 2\, I_3\big)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :
  $$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ & = & x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$
  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $z = 0$. En effet, si z est non nul, le vecteur résultat aura pour $2^{\text{ème}}$ (et $3^{\text{ème}}$ coefficient un réel non nul. On choisit donc $z = 0$.
  Les deux vecteurs restants sont opposés. Pour obtenir le vecteur nul il faut et il suffit alors de choisir $y = x$. En prenant $x = 1$ (par exemple, on obtient alors :
  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2\big(M(1,2,3)\big) \qquad \text{et ainsi} \qquad \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subset E_2\big(M(1,2,3)\big)$$
  L'égalité peut alors s'obtenir à l'aide d'un argument de dimension.
  Pour cela, il faut démontrer au préalable que la matrice $M(1,2,3) - 2\, I_3$ est de rang 2.
  On obtient ainsi, par théorème du rang :
  $$\dim\big(E_2\big(M(1,2,3)\big)\big) \ = \ \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) - \text{rg}(M(1,2,3) - 2\, I_3) \ = \ 3 - 2 \ = \ 1$$

5. Donner l'expression de P^{-1} et en déduire la matrice $\big(M(1,2,3)\big)^n$ en fonction de l'entier naturel n.

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.
  Remarquons de suite que P est triangulaire (supérieure). De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, cette P est inversible.
  (une matrice de passage n'est pas toujours triangulaire mais est toujours inversible)
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
  On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow 2\, L_1 - 3\, L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - 2\, L_3 \end{array} \right.$. On obtient :
  $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
  On effectue l'opération $\{ \ L_1 \leftarrow L_1 - 2\, L_2$. On obtient :
  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

□

III. Cas particulier de la matrice $M(1,1,1)$

On pose $J = M(1,1,1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

6. Donner les valeurs propres de la matrice $M(1,1,1)$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice $M(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire (supérieure).
  Ainsi, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Sp}\big(M(1,1,1)\big) = \{1\}.}$$

- Démontrons que $M(1,1,1)$ n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que $M(1,1,1)$ est diagonalisable. Il existe alors :
  × $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,
  × $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $M(1,1,1)$,
  telles que : $M(1,1,1) = PDP^{-1}$. Or $\mathrm{Sp}\big(M(1,1,1)\big) = \{1\}$. Donc :

$$M(1,1,1) \;=\; P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \;=\; P\, I_3\, P^{-1} \;=\; P\, P^{-1} \;=\; I_3$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } M(1,1,1) \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

7. Calculer les matrices J^2, J^3. En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $J = M(1,1,1) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  et $J^3 = J \times J^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Par récurrence immédiate, on en déduit, pour tout } n \geqslant 3,\ J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

8. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$:

$$\big(M(1,1,1)\big)^n = I_3 + n\,J + \frac{n(n-1)}{2}\,J^2$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$M(1,1,1) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ I_3 + J$$

- Les matrices I_3 et J commutent car I_3 commute avec toute matrice de même ordre.
  On peut appliquer la formule du binôme de Newton. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{array}{rcll} \big(M(1,1,1)\big)^n & = & \big(J + I_3\big)^n & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k\, {I_3}^{n-k} & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k & \textit{(car } J^k\, I_3^{n-k} = J^k\, I_3 = J^k\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} J^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 2\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 3,\ J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 & \\ & = & I_3 + n\,J + \dfrac{n(n-1)}{2}\,J^2 & \end{array}$$

- Il reste alors à vérifier si cette formule est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$.
  - × Si $n = 0$
    - ▸ D'une part : $\big(M(1,1,1)\big)^0 = I_3$.
    - ▸ D'autre part : $I_3 + 0\,J + \dfrac{0(0-1)}{2}\,J^2 = I_3$.

    Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.
  - × Si $n = 1$
    - ▸ D'une part : $\big(M(1,1,1)\big)^1 = M(1,1,1)$.
    - ▸ D'autre part : $I_3 + 1\,J + \dfrac{1(1-1)}{2}\,J^2 = I_3 + J = M(1,1,1)$.

    Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ \big(M(1,1,1)\big)^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$
(la somme la plus à droite est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 2$.
L'argument $n \geqslant 2$ est donc essentiel pour découper la somme.
Les cas $n = 0$ et $n = 1$ doivent donc être traités à part.
- Ici, la matrice J vérifie : $\forall k \geqslant 3, \ J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 3 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'indice 2, il aurait fallu traiter seulement à part les cas $n = 0$ (le découpage de la somme aurait alors été valable pour $n \geqslant 1$).

□

9. En déduire l'écriture matricielle de $\big(M(1,1,1)\big)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\big(M(1,1,1)\big)^n &= I_3 + n\,J + \frac{n(n-1)}{2}\,J^2 \\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ \big(M(1,1,1)\big)^n = \begin{pmatrix}1&n&n+\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

□

IV. Cas particulier de la matrice $M(1,1,2)$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $M(1,1,2)$. On définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (u,v,w)$ par :
$$u = (1,0,0),\ v = (0,1,0),\ w = (2,1,1)$$

10. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\big((1,0,0),(0,1,0),(2,1,1)\big)$ est libre.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :
$$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,0) + \lambda_3 \cdot (2,1,1) = (0,0,0) \quad (*)$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} (*) & \Leftrightarrow & (\lambda_1 + 2\,\lambda_3,\ \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_3) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right. \\ & & \textit{(par remontées successives)} \end{array}$$

La famille (u, v, w) est donc libre.

- De plus : Card $\big((u, v, w)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u, v, w) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note Card $\big((u, v, w)\big) = 3$).
- Vect (u, v, w) est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u, v, w). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u, v, w) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\,(\text{Vect}\,(u, v, w))}$ et $\cancel{\dim\big((u, v, w)\big)}$ n'ont aucun sens !

$\square$

11. Prouver que les vecteurs u et w sont deux vecteurs propres de f associés à deux valeurs propres que l'on précisera.

Démonstration.
Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $W = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u)\big) & = & \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \\ & = & M(1,1,2) \times U \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = & U \ = \ \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u\big) \end{array}$$

Comme $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u)\big) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u\big)$, on en déduit, par isomorphisme de représentation :

$$f(u) = 1 \cdot u$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Enfin, comme } u \neq 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ on en conclut que } u \text{ est un vecteur propre de } f \\ \text{associé à la valeur propre 1.}\end{array}}$$

- De même :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(w)\big) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \\
&= M(1,1,2) \times W \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(w\big) \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(2 \cdot w\big) \qquad \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \textit{ est linéaire)}
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(w)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(2 \cdot w\big)$, on en déduit, par isomorphisme de représentation :

$$f(w) = 2 \cdot w$$

Enfin, comme $w \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, on en conclut que w est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2.

Commentaire

- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à $M(1,1,2)$, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
  Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{aligned}
E \text{ espace vectoriel de dimension } n &\longleftrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\
f : E \to E \text{ endomorphisme} &\longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\
f \text{ bijectif} &\longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible}
\end{aligned}$$

  Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{aligned}
u &\longleftrightarrow U \\
f &\longleftrightarrow M(1,1,2) \\
f(u) &\longleftrightarrow M(1,1,2) \times U
\end{aligned}$$

  Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme. □

12. Exprimer $f(v)$ comme combinaison linéaire des vecteurs u et v. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v)\big) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \\
&= M(1,1,2) \times V \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= U + V \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u\big) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(v\big) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u+v\big) \qquad \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \textit{ est linéaire)}
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u+v\big)$, on en déduit, par isomorphisme de représentation : $f(u) = u + v$

- $f(u) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$ d'après la question précédente.

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(v) = 1 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$ d'après ce qui précède.

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(w) = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 2 \cdot w$ d'après la question précédente.

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(w)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Finalement : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que déterminer la matrice représentative de f dans la base (u,v,w) consiste à exprimer l'image par f des vecteurs u, v, w suivant cette même base (u,v,w).
- Pour résoudre la question, on se sert ici une nouvelle fois de la correspondance entre le monde des espaces vectoriels et le monde matriciel.
  Ou peut ajouter la correspondance suivante à celle déjà évoquée :

  expression de $f(u)$ dans (u,v,w) $\longleftrightarrow$ expression de $M(1,2,3) \times U$ dans (U,V,W)

□

13. Montrer que pour tout entier naturel n : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

- **Initialisation** :
  - D'une part, $T^0 = I_3$.
  - D'autre part, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\text{c'est-à-dire : } T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

□

Commentaire

On a rédigé ici à l'aide d'une récurrence, raisonnement possible puisque la formule était donnée dans l'énoncé. On aurait aussi pu faire la démonstration à l'aide de la formule du binôme. Détaillons la rédaction.

- Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $T = D + N$.
- Remarquons tout d'abord :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et, par une récurrence immédiate : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

- On remarque de plus que : $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$.

Ainsi D et N commutent.

Commentaire

- On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{array}{rcll} T^n & = & (D+N)^n & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\ & = & \displaystyle\binom{n}{0} N^0\ D^n + \binom{n}{1} N^1\ D^{n-1} & \\ & = & D^n + nND^{n-1} & \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} D^n + nND^{n-1} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{array}$$

- Enfin :
  - × si $n = 0$, $T^0 = I_3$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = I_3$.
  - × si $n = 1$, $T^1 = T$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix} = T$.

14. Montrer que la matrice de passage de R de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ a pour matrice inverse la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v), \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$$

- Ainsi :

$$R = P_{\mathscr{B},\mathcal{C}} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Or :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{RQ = I_3 \text{ donc } R \text{ est inversible et admet pour matrice inverse } Q.}$

□

15. Donner une relation reliant les matrices $M(1,1,2)$, Q, R et T.

Démonstration.
D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathcal{C}} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathcal{C},\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ M(1,1,2) & = & R & \times & T & \times & Q \end{array}$$

$\boxed{\text{On en déduit : } M(1,1,2) = R\,T\,R^{-1}.}$

□

16. Sans l'expliciter, écrire $\big(M(1,1,2)\big)^n$ en fonction de n, Q, R, T.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes :

$$\begin{array}{rcll} \big(M(1,1,2)\big)^n & = & \big(RTQ\big)^n & \\ & = & \big(RTR^{-1}\big)^n & \\ & = & RT^nR^{-1} & \textit{(par une récurrence immédiate)} \end{array}$$

$\boxed{\text{Ainsi : } (M(1,1,2))^n \ = \ RT^nQ}$

□