Devoir d'entraînement

Préliminaires

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Une application p est appelé un **projecteur de** E si elle vérifie :
(1) $p \in \mathscr{L}(E)$ (p est un endomorphisme de E).
(2) $p \circ p = p$ ($\forall x \in E,\, p(p(x)) = (p \circ p)(x) = p(x)$).

1. Démontrer : $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$.

2. Démontrer : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$.

3. Démontrer : $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$.

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie I

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère deux endomorphismes u et v de E. On note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E.

$$A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Vérifier que u et v sont des projecteurs.

5. ***a)*** Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.

b) Vérifier que le vecteur $x_0 = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.

c) Déterminer le spectre de $u \circ v$.

6. ***a)*** Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, l'endomorphisme $u \circ v$ est-il un projecteur ? On pourra utiliser la question ***1.***

Partie II

Dans cette partie, E est un espace vectoriel quelconque de dimension finie. On considère deux projecteurs p et q de E différents de l'identité id_E et de l'application nulle. On note : $f = p + q$. On suppose :

× $p \circ q = q \circ p$,
× $f \neq \mathrm{id}_E$.

7. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E et calculer $f^3 - 3f^2 + 2f$.
En déduire les valeurs propres possibles de f.

8. ***a)*** ***(i)*** Démontrer :

$$\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\} \quad \Rightarrow \quad 0 \in \mathrm{Sp}(f)$$

(ii) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Démontrer : $f^2(x) = 2\,(p \circ q)(x)$. En déduire :

$$0 \in \mathrm{Sp}(f) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\}$$

b) (i) Démontrer :

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\} \quad \Rightarrow \quad 2 \in \mathrm{Sp}(f)$$

(ii) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$. En calculant $f^2(x)$, démontrer : $(p \circ q)(x) = x$. En déduire :

$$2 \in \mathrm{Sp}(f) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\}$$

c) On souhaite démontrer dans cette question que tout vecteur u de E se décompose de manière unique sous la forme $u = a + b + c$ où : $a \in \mathrm{Ker}(f)$, $b \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $c \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.

(i) Soit $u \in E$. Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in E^3$ tel que :

$$u = a + b + c \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathrm{Ker}(f) \\ b \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \\ c \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \end{array} \right.$$

Exprimer $f(u)$ et $f^2(u)$ en fonction de a, b et c.
En déduire :

$$a = u - \frac{3}{2}\, f(u) + \frac{1}{2}\, f^2(u), \qquad b = 2\, f(u) - f^2(u) \qquad \text{et} \qquad c = -\frac{1}{2}\, f(u) + \frac{1}{2}\, f^2(u)$$

(ii) Vérifier que, si a, b et c prennent les valeurs citées ci-dessus, alors :

$$u = a + b + c \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathrm{Ker}(f) \\ b \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \\ c \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \end{array} \right.$$

(iii) Conclure.