CONCOURS BLANC Mathématiques PSI

—

corrigé de l'épreuve CCINP

Il s'agit de l'épreuve CCINP PC 2016.

1. a. • Les applications φ_n et B_n sont linéaires, en effet, pour $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:

⋆ $\varphi_n(\lambda P+Q)=nX(\lambda P+Q)(X)+X(1-X)(\lambda P+Q)'(X)$
$=\lambda[nXP(X)+X(1-X)P'(X)]+[nXQ(X)+X(1-X)Q'(X)]$
$=\lambda\varphi_n(P)+\varphi_n(Q)$.

⋆ $B_n(\lambda P+Q)(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}(\lambda P+Q)(\frac{k}{n})p_{k,n}(X)=\lambda\sum\limits_{k=0}^{n}P(\frac{k}{n})p_{k,n}(X)+\sum\limits_{k=0}^{n}Q(\frac{k}{n})p_{k,n}(X)$.
$=\lambda B_n(P)+B_n(Q)$.

• Les applications φ_n et B_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, en effet :

⋆ $\forall\, k\in[\![0;n]\!]$, $\varphi_n(X^k)=nX^{k+1}+X(1-X)kX^{k-1}=(n-k)X^{k+1}+kX^k$ est de degré $k+1$ si $k\in[\![0,n-1]\!]$, et de degré n si $k=n$, donc, $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\varphi_n(X^k)\in\mathbb{R}_n[X]$, et ainsi, par linéarité, $\forall\, P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

⋆ $\forall\, P\in\mathbb{R}_n[X]$, $B_n(P)=\sum\limits_{k=0}^{n}P(\frac{k}{n})p_{k,n}(X)$ est une combinaison linéaire, à coefficients $P(\frac{k}{n})\in\mathbb{R}$, des polynômes $p_{kn}(X)\in\mathbb{R}_n[X]$, donc $B_n(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, φ_n et B_n sont bien des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. On a $p_{k,n}(X)=\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$, donc :

$$\begin{aligned}p'_{k,n}(X)&=\tbinom{n}{k}kX^{k-1}(1-X)^{n-k}-\tbinom{n}{k}X^k(n-k)(1-X)^{n-k-1}\\ X(1-X)p'_{k,n}(X)&=k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k+1}-(n-k)\tbinom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k}\\ nXp_{n,k}(X)&=n\tbinom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k}\end{aligned}$$

puis en ajoutant les deux dernières lignes :

$$\begin{aligned}\varphi_n(p_{k,n})(X)&=k\tbinom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k}+k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k+1}\\ &=k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}[X+(1-X)]=k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\\ &=kp_{k,n}(X).\end{aligned}$$

c. • D'après la question précédente, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $p_{k,n}$ est un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre k. La famille $\mathscr{F}=(p_{0,n},\dots,p_{n,n})$ est donc libre (famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes distinctes).

Et comme c'est une famille de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, on peut conclure que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

• On vient de dire que la famille $\mathscr{F}=(p_{0,n},\dots,p_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de φ_n, donc par définition, φ_n est diagonalisable (et $\mathscr{F}$ est une base de diagonalisation de φ_n).

d. • On vient de voir que φ_n admet 0 comme valeur propre (avec pour vecteur propre associé $p_{0,n}(X)=(1-X)^n$), donc, φ_n n'est pas injectif, donc pas bijectif.

• Si $P\in\mathbb{R}_n[X]$ est tel que $B_n(P)=\sum\limits_{k=0}^{n}P(\frac{k}{n})p_{k,n}(X)=0$, alors $\forall k\in[\![0;n]\!]$, $P(\frac{k}{n})=0$ car $\mathscr{F}=(p_{0,n},\dots,p_{n,n})$ est une famille libre, donc P possède $n+1$ racines distinctes, et donc $P=0$ (seul polynôme ayant strictement plus de racines que son degré).

Ainsi, $\mathrm{Ker}(B_n)=\{0\}$, donc B_n est injectif, et donc bijectif puisque c'est un endomorphisme en dimension finie.

2. a. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours de r expériences de Bernoulli indépendantes et toutes de probabilité de succès t, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(r,t)$.

b. On a $T_r(\Omega)=[\![0;r]\!]$ et, pour tout $k\in[\![0;r]\!]$, $P(T_r=k)=\binom{r}{k}t^k(1-t)^{r-k}=p_{k,r}(t)$.

c. • Comme $T_r \rightsquigarrow \mathscr{B}(r,t)$, on a $E(T_r) = rt$ et $V(T_r) = E(T_r^2) - E(T_r)^2 = rt(1-t)$, donc $E(T_r^2) = V(T_r) + E(T_r)^2 = rt(1-t) + r^2t^2$.

• Comme $\overline{T_r} = \frac{1}{r}T_r$, on a $E(\overline{T_r}) = \frac{1}{r}E(T_r) = t$ par linéarité de l'espérance, puis $V(\overline{T_r}) = \frac{1}{r^2}V(T_r) = \frac{t(1-t)}{r}$ par variance d'une transformation affine de T_r, et à nouveau par linéarité de l'espérance, $E(\overline{T_r}^2) = \frac{1}{r^2}E(T_r^2) = \frac{t(1-t)}{r} + t^2 = \frac{t}{r} + t^2(1-\frac{1}{r}) = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1)$.

d. Soit $t \in [0,1]$. On a par 2b et 2c :

• $\sum\limits_{k=0}^{r} p_{k,r}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(T_r = k) = 1$ car T_r est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;r]\!]$.

• $\sum\limits_{k=0}^{r} \frac{k}{r}p_{k,r}(t) = \sum\limits_{k=0}^{r} \frac{k}{r}P(T_r = k) = E(\overline{T_r}) = t$ par la formule de transfert avec $h : x \mapsto \frac{x}{r}$.

• $\sum\limits_{k=0}^{r} (\frac{k}{r})^2p_{k,r}(t) = \sum\limits_{k=0}^{r} (\frac{k}{r})^2P(T_r = k) = E(\overline{T_r}^2) = (1-\frac{1}{r})t^2 + \frac{1}{r}t$ par la formule transfert avec $h : x \mapsto (\frac{x}{r})^2$.

e. Les trois relations obtenues en 2d sont des expressions polynomiales en t qui coïncident sur tout l'intervalle $[0,1]$, donc en une infinité de valeurs, et donc elles sont égales (leur différence est une expression polynomiale ayant une infinité de racines, donc est nulle).

Ainsi, les trois égalités précédentes sont valables pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Déjà, $\mathbb{R}_2[X]$ est un bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ (il est inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$ car $n \geqslant 2$, il contient 0 et est stable par combinaison linéaire).

De plus, vu la définition de B_n, les égalités de 2d, prises dans le cas $r = n$, donnent $B_n(1) = 1$, $B_n(X) = X$ et, $B_n(X^2) = (1-\frac{1}{n})X^2 + \frac{1}{n}X$.

Ainsi B_n envoie une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc par linéarité, $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par B_n.

4. a. La matrice H est triangulaire de coefficients diagonaux $1, 1, 0$, donc on trouve immédiatement $\chi_H = X(X-1)^2$.

La racine 0 est simple, donc le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Et on voit que $H - I_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc par théorème du rang, le sous-espace propre associé est de dimension 2, à savoir la multiplicité de 1.

Ainsi χ_H est scindé et pour chaque racine de χ_H, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité, donc la matrice H est diagonalisable.

Rq. On aurait également pu conclure avec la somme des dimensions des sous-espaces propres égale à 3, à savoir la taille de la matrice.

b. La matrice Q est inversible, car c'est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls (donc son déterminant, produit de ses coefficients diagonaux, est non nul).

c. *Méthode 1.* Par formule de changement de base, on a $H = QDQ^{-1}$, i.e. $D = Q^{-1}HQ$, si et seulement si les colonnes de Q sont propres pour H, associées aux valeurs propres $1, 1, 0$ dans cet ordre.

Or les deux premières colonnes de Q sont clairement propres pour H associées à la valeur propre 1, et on trouve :

$$H\begin{pmatrix} a\\b\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\b+1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \iff a = 0 \text{ et } b = -1.$$

Ainsi, si on pose $Q = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1 \end{pmatrix}$, alors, Q est inversible et $H = QDQ^{-1}$.

Méthode 2. On a $H = QDQ^{-1} \Leftrightarrow HQ = QD$ (ce qui évite le calcul de Q^{-1}), et on trouve facilement $HQ = \begin{pmatrix} 1&0&a\\0&1&1+b\\0&0&0 \end{pmatrix}$ et $QD = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$, d'où $H = QDQ^{-1} \Leftrightarrow a = 0$ et $b = -1$.

5. a. On trouve sans difficulté $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = I_3$.

b. Par hypothèse, $M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} M$, i.e. pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, $[M_k]_{i,j} \xrightarrow[k\to+\infty]{} M_{i,j}$.

Ainsi pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, $[BM_k]_{i,j} = \sum\limits_{\ell=1}^{3}[B]_{i,\ell}[M_k]_{\ell,j} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum\limits_{\ell=1}^{3}[B]_{i,\ell}[M]_{\ell,j} = [BM]_{i,j}$ par linéarité du passage à la limite, i.e. $BM_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} BM$.

c. On a $A_k = (1-\frac{1}{k})I_3 + \frac{1}{k}H = (1-\frac{1}{k})I_3 + \frac{1}{k}QDQ^{-1} = Q\big((1-\frac{1}{k})I_3 + \frac{1}{k}D\big)Q^{-1}$.
Or on observe que $(1-\frac{1}{k})I_3 + \frac{1}{k}D = D_k$, donc on a bien $A_k = QD_kQ^{-1}$.

d. Par 5c, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(A_k)^p = Q(D_k)^pQ^{-1}$, et $(D_k)^p = \mathrm{Diag}(1, 1, (1-\frac{1}{k})^p)$.
On voit alors que $\lim\limits_{p\to+\infty}(D_k)^p = \mathrm{Diag}(1, 1, 0) = D$, car $0 \leqslant 1-\frac{1}{k} < 1$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty}(1-\frac{1}{k})^p = 0$.
Ainsi par 5b, $\lim\limits_{p\to+\infty}(A_k)^p = \lim\limits_{p\to+\infty}Q(D_k)^pQ^{-1} = QDQ^{-1} = H$.

e. Par 5c, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(A_k)^k = Q(D_k)^kQ^{-1}$, et $(D_k)^k = \mathrm{Diag}(1, 1, (1-\frac{1}{k})^k)$.
On voit alors que $\lim\limits_{p\to+\infty}(D_k)^p = \mathrm{Diag}(1, 1, \frac{1}{e})$, car $(1-\frac{1}{k})^k = e^{k\ln(1-\frac{1}{k})}$ et $k\ln(1-\frac{1}{k}) \underset{k\to+\infty}{\sim} -1$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty}(1-\frac{1}{k})^k = e^{-1}$.
Ainsi par 5b, $\lim\limits_{k\to+\infty}(A_k)^k = \lim\limits_{k\to+\infty}Q(D_k)^kQ^{-1} = Q\,\mathrm{Diag}(1, 1, \frac{1}{e})Q^{-1}$.
On trouve alors facilement $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ puis $\lim\limits_{k\to+\infty}(A_k)^k = \cdots = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&1-e^{-1}\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}$.

6. a. Par linéarité et positivité de l'espérance, $V(Y) = E((Y-(E(Y))^2) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \geqslant 0$, donc, $E(Y^2) \geqslant (E(Y))^2$, donc $E(Y) \leqslant |E(Y)| \leqslant \sqrt{E(Y^2)}$.

b. Soit $t \in [0, 1]$. Par 6a, on a $E(|t-\overline{T_n}|) \leqslant \sqrt{E((t-\overline{T_n})^2)}$.
Or, $E((t-\overline{T_n})^2) = E(t^2 - 2t\overline{T_n} + \overline{T_n}^2) = t^2 - 2tE(\overline{T_n}) + E(\overline{T_n}^2)$ par linéarité de l'espérance, et donc par 2c, $E((t-\overline{T_n})^2) = t^2 - 2t^2 + (1-\frac{1}{n})t^2 + \frac{1}{n}t = \frac{t-t^2}{n} = \frac{t(1-t)}{n}$.
Ainsi $E(|t-\overline{T_n}|) \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.

7. a. Par hypothèse sur f, la dérivée f' est continue, donc bornée, sur le segment $[0, 1]$, de sorte qu'il existe donc un réel M_f tel que : $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leqslant M$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$, $|f(a) - f(b)| \leqslant M_f|a-b|$.

b. Soit $t \in [0, 1]$. Comme, $\overline{T_n}$ est à valeurs dans $[0, 1]$ (car $T_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$), on peut appliquer 7a pour obtenir $|f(t) - f(\overline{T_n})| \leqslant M_f|t-\overline{T_n}|$, donc par croissance et linéarité de l'espérance :

$$E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leqslant M_fE(|t-\overline{T_n}|).$$

Ainsi par 6b, $E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leqslant M_f\sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.

c. Soit $t \in [0, 1]$.
On a $f(t) = E(f(t))$ (l'espérance d'une constante est la valeur constante) et par définition de $B_n(f)$ et théorème de transfert, on trouve comme en 2c, $B_n(f)(t) = E(f(\overline{T_n}))$. Ainsi $f(t) - B_n(f)(t) = E(f(t) - f(\overline{T_n}))$ par linéarité de l'espérance, puis par croissance et 7b :

$$|f(t) - B_n(f)(t)| = |E(f(t) - f(\overline{T_n}))| \leqslant E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leqslant M_f\sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

En effet, pour tout variable discrète Y admettant une espérance, on a $\pm Y \leqslant |Y|$, donc par croissance et linéarité de l'espérance, $\pm E(Y) \leqslant E(|Y|)$, i.e. $|E(Y)| \leqslant E(|Y|)$
De plus, une étude facile des variations de la fonction $h : t \mapsto t(1-t) = t - t^2$ montre qu'elle est positive sur $[0, 1]$ et de valeur maximale $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, donc $\forall\, t \in [0, 1]$, $\sqrt{t(1-t)} \leqslant \frac{1}{2}$.
En conclusion, on a bien pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}$.

d. Vu 7c, on a $0 \leqslant \|f - B_n(f)\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{M_f}{2\sqrt{n}}$, donc $\|f - B_n(f)\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement, autrement dit, la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

8. Les fonctions f et $B_n(f)$ sont continues (la première est de classe $\mathcal{C}^1$ par hypothèse, et la seconde est polynomiale), et $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ par 7d.
Donc par théorème d'interversion entre une limite et une intégrale sur un segment :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty}B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

9. a. Par intégration par parties (dans une intégrale sur un segment), on a en dérivant $x \mapsto x^a$ et en primitivant $x \mapsto (1-x)^b$, on trouve :

$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x = \big[-\frac{x^a(1-x)^{b+1}}{b+1}\big]_0^1 + \frac{a}{b+1}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b+1}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1}\,\mathrm{d}x.$

b. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}_k$ la propriété : $\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

- $\mathcal{P}_0$ est vraie, car $\int_0^1 p_{0,n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \big[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\big]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
- Soit $k\in[\![0;n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
  Par 9a, on a $\int_0^1 p_{k+1,n}(x)\,\mathrm{d}x = \binom{n}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}\,\mathrm{d}x = \binom{n}{k+1}\frac{k+1}{n-k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x.$
  Or $\binom{n}{k+1}\frac{k+1}{n-k} = \frac{(k+1)n!}{(n-k)(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.
  Ainsi, $\int_0^1 p_{k+1,n}(x)\,\mathrm{d}x = \binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ d'après $\mathcal{P}_k$.

Ainsi par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

c. Par 9b et linéarité de l'intégrale (la somme est finie, donc l'interversion est licite) :

$$S_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})\int_0^1 p_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})p_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi par 8, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

On sait que la somme de Riemann à gauche $R_n(f) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand $n\to+\infty$ (cours de première année).

Or $S_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{n}{n+1}T_n(f) + \frac{1}{n+1}f(1)$, donc en passant à la limite, on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

11. a. Soit $x\in[0,1]$, alors la fonction $g : u\mapsto \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus :

- si $x\neq 0$, $g(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{u^a(xu)^b}{u^c} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{x^b}{u^{c-a-b}}$ avec $c-a-b\geqslant 2>1$ par hypothèse.
- si $x=0$, alors $g(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{u^a}{u^c} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{c-a}}$ et $c-a\geqslant b+2>1$ par hypothèse.

Ainsi, on voit dans les deux cas que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u$ est convergente.

b. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre à $h : (x,u)\mapsto \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$:

- Pour tout $u\in\mathbb{R}_+$, $x\mapsto h(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,u) = \frac{u^{a+1}b(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}$.
- Pour tout $x\in[0,1]$, $u\mapsto h(x,u) = \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après 11a.
- Pour tout $x\in[0,1]$, $u\mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ vu le premier point.
- *Domination.* Pour tout $(x,u)\in[0,1]\times\mathbb{R}_+$,
  $$|\tfrac{\partial h}{\partial x}(x,u)| = b|\tfrac{u^{a+1}(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}| \leqslant b\tfrac{u^{a+1}(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c} = \varphi(u).$$
  Et si $b\geqslant 1$, alors la fonction φ ainsi définie est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question 11a appliquée au triplet $(a+1,b-1,c)$.

Ainsi le théorème s'applique et montre que la fonction $F : x\mapsto \int_0^{+\infty} h(x,u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et que $\forall\,x\in[0,1]$, $F'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u$.

c. La fonction $h : t\mapsto \frac{t}{1-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ avec $h'(t) = \frac{1-t+t}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2} > 0$ pour $t\in[0,1[$, donc h est strictement croissante sur $[0,1[$, et telle que $h(0)=0$ et $\lim\limits_{t\to1^-} h(t) = +\infty$.

Ainsi h réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$.

d. On fait le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$ dans l'intégrale convergente $F(0) = \int_0^{+\infty}\frac{u^a}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u$, ce qui est possible d'après la question précédente. On trouve alors :

$$F(0) = \int_0^1 \frac{(\frac{t}{1-t})^a}{(1+\frac{t}{1-t})^c}\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2} = \int_0^1 \frac{t^a}{(1-t)^{a+2-c}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^a(1-t)^{c-2-a}\,\mathrm{d}t$$

où $0\leqslant a\leqslant c-b-2\leqslant c-2$, donc par 9b :

$$F(0) = \frac{1}{\binom{c-2}{a}} \int_0^1 p_{a,c-2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\binom{c-2}{a}} \frac{1}{c-1} = \frac{a!(c-a-2)!}{(c-1)!}.$$

On a de même $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^{c-b}}\,\mathrm{d}u$, donc en remplaçant c par $c-b$ dans le calcul précédent, ce qui est possible puisque $0 \leqslant a \leqslant c-b-2$, on trouve $F(1) = \frac{a!(c-b-a-2)!}{(c-b-1)!}$.

12. Pour $n \geqslant k$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$, car le numérateur est un produit de k termes $n-i$, pour $i \in [\![0;k-1]\!]$, tous équivalents à n quand $n \to +\infty$.
Ainsi pour tout $t \in]0,1[$ et $n \geqslant k$, on a $f_n(t) = p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k(1-t)^n \frac{t^k}{k!(1-t)^k}$.

13. Pour $t \in]0,1[$, l'équivalent de $f_n(t)$ trouvé à la question 12 montre que la série $\sum f_n(t)$ converge, puisque les termes y sont positifs et que la série $\sum n^k(1-t)^n$ converge par critère de d'Alembert, ou car $n^k(1-t)^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées (et $\frac{t^k}{k!(1-t)^k}$ est une constante).
De plus, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la série $\sum f_n(0)$ converge évidemment.
De même, on a $f_n(1) = 0$ pour tout $n \neq k$, donc la série $\sum f_n(1)$ converge évidemment.
Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge bien simplement sur $[0,1]$.

14. On a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 0$.
On a $f_n(1) = 0$ pour tout $n \neq k$ et $f_k(1) = 1$, donc $S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(1) = 1$.

15. **a.** Pour tout $u \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ (série géométrique).

b. Par théorème de dérivation terme à terme des séries entières, la fonction $G : u \mapsto \frac{1}{1-u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, à savoir sur $]-1,1[$ (question 15a), et :

$$\forall\, u \in]-1,1[,\ G^{(k)}(u) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} u^{n-k}$$

puisque la k-ème dérivée de $u \mapsto u^n$ est nulle si $k > n$, et vaut $u \mapsto \frac{n!}{(n-k)!} u^{n-k}$ si $k \leqslant n$ (récurrence immédiate). De même, une récurrence immédiate donne $G^{(k)} : u \mapsto \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}$.
On a donc bien, en divisant l'égalité obtenue par $k!$:

$$\forall\, u \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-u)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} u^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} u^{n-k}.$$

c. Soit $t \in]0,1]$. On a $f_n(t) = 0$ si $n < k$, et $f_n(t) = p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ si $n \geqslant k$, donc par la question précédente, appliquée à $u = 1-t \in [0,1[$:

$$S(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{t^k}{(1-(1-t))^{k+1}} = \frac{t^k}{t^{k+1}} = \frac{1}{t}.$$

d. On note que les fonctions f_n sont polynomiales, donc continues sur $[0;1]$.
Si la série $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $[0,1]$, le théorème de continuité des séries de fonctions s'appliquerait et montrerait que sa somme S est continue sur $[0,1]$.
Or vu les questions 14 et 15c, la fonction S est manifestement discontinue en 0 : on a $S(0) = 0$ et $S(t) = \frac{1}{t}$ pour $t \in]0;1]$, donc $\lim_{t\to 0^+} S(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$.
Ainsi la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.