Devoir surveillé n° 1 (4h)

—

séries numériques

Avertissements

- *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, seront pris en compte dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.*
- *Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- ***L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit.***
- *L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants l'un de l'autre.*

Problème 1 (E3A) - Série des restes d'une série convergente

Soient n_0 un entier naturel fixé et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n$ une série convergente.

Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on note r_n son reste d'ordre n, défini par $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} r_n$ dans quelques exemples, en partie I, puis dans un cadre plus général, en partie II.

Partie I - Quelques exemples usuels

1. Soit $q \in \mathbb{C}$. On suppose dans cette question que $n_0 = 0$ et que $\forall\, n \geqslant 0$, $a_n = q^n$.

1.1. À quelle condition sur q la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est-elle convergente ?

On suppose dans la suite de cette question que cette condition est réalisée.

1.2. Expliciter r_n.

1.3. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette question que $n_0 = 1$ et que $\forall\, n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

2.1. À quelle condition sur α la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ est-elle convergente ?

On suppose dans la suite de cette question que cette condition est réalisée.

2.2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, justifier que pour tous entiers n et N tels que $N \geqslant n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}.$$

2.3. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant r_n \leqslant \dfrac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$.

2.4. Justifier alors que $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2.5. Conclure, en discutant selon la valeur de α, sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} r_n$.

3. On suppose dans cette question que $n_0 = 1$ et que $\forall\, n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3.1. Justifier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

3.2. Soit $n \geqslant 1$. On cherche dans cette question à obtenir une expression intégrale de r_n.
On pose $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que $|I_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

b. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$ et en déduire que $I_n = \ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

c. Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, et justifier que $r_n = -I_n$.

3.3. Conclusion.

a. Soit $n \geqslant 1$. En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.

b. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} r_n$.

Partie II - Un résultat général

On suppose dans cette partie que $n_0 = 0$ et que pour tout $n \geqslant 0$, $a_n \geqslant 0$.

4. Pour $n \geqslant 1$, exprimer a_n en fonction de r_n et r_{n-1}. En déduire que :

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad \sum_{n=0}^{p} r_n = (p+1) r_p + \sum_{n=0}^{p} n a_n.$$

5. On suppose dans cette question que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$ converge.

Montrer alors que la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{p} n a_n\right)_{p\geqslant 0}$ est majorée, puis que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n$ converge.

6. On suppose dans cette question que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n$ converge, et on note R_n son reste d'ordre n.

6.1. Soit $p \geqslant 1$. Justifier l'encadrement $R_p \geqslant (p+1) r_p \geqslant 0$.

6.2. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$.

7. Soit $q \in [0;1[$. À l'aide des résultats établis dans la question **1** et dans cette partie, justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n q^n$ converge, et calculer sa somme.

8. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On suppose dans cette question que $\forall\, n \geqslant 0,\ a_n = \dfrac{x^n}{n!}$.
À l'aide des résultats de cette partie, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

Problème 2 (Centrale) - Étude de deux propriétés des séries

Dans tout ce problème, les suites et séries considérées sont à termes réels et indicées par $\mathbb{N}$. L'objectif de ce problème est d'étudier deux propriétés portant sur les séries, notées (P_1) et (P_2), et définies respectivement dans les parties I et II ci-dessous.

Partie I - Propriété (P_1).

On dit qu'une série $\sum a_n$ vérifie la propriété (P_1) si :

$$\boxed{(P_1) \text{ : pour toute suite bornée } (u_n)\text{, la série } \sum a_n u_n \text{ converge.}}$$

1. Montrer que si $\sum a_n$ converge absolument, alors $\sum a_n$ vérifie la propriété (P_1).

2. Soit $\sum a_n$ une série ne convergeant pas absolument.
Construire une suite $(u_n) \in \{-1;1\}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge.

3. Caractériser les séries $\sum a_n$ vérifiant la propriété (P_1).

Partie II - Propriété (P_2).

On dit qu'une série $\sum a_n$ vérifie la propriété (P_2) si :

$$\boxed{(P_2) \text{ : pour toute série convergente } \sum u_n\text{, la série } \sum a_n u_n \text{ converge.}}$$

4. Soit $\sum a_n$ une série telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

4.1. Prouver que la suite (a_n) converge.

4.2. Soit $\sum u_n$ une série convergente. On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle d'ordre n.
Prouver, pour tout entier naturel N, la relation :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1})\, U_n + a_N U_N.$$

4.3. En déduire que la série $\sum a_n$ vérifie la propriété (P_2).
On pourra en particulier utiliser le résultat établi dans la partie I.

5. Soit $\sum a_n$ une série divergente de réels positifs.

On se propose de construire une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge.
Pour cela on définit par récurrence trois suites (p_n), (ε_n) et (A_n) de la façon suivante :

- On pose $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$ et $A_0 = a_0$.
- Pour $n \geqslant 1$:
  - si $A_{n-1} < p_{n-1}$, alors on pose $p_n = p_{n-1}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ et $A_n = A_{n-1} + a_n\varepsilon_n$.
  - si $A_{n-1} \geqslant p_{n-1}$, alors on pose $p_n = 1 + p_{n-1}$, $\varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2}$ et $A_n = A_{n-1} + a_n\varepsilon_n$.

5.1. *Étude d'un exemple.* Dans le cas où la suite (a_n) est la suite constante égale à 1 :

a. Donner les 5 premiers termes des suites (p_n), (ε_n) et (A_n) ainsi définies.

b. Écrire une fonction Python `construction` prenant en paramètre un entier naturel n et renvoyant le triplet $(p_n, \varepsilon_n, A_n)$.

5.2. Dans le cas général, justifier l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'un entier naturel n_k tel que :

$$p_{n_k} = k \text{ et } \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}.$$

5.3. Prouver que la suite (ε_n) tend vers 0 et que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge.

6. Soit $\sum a_n$ une série telle que, pour toute suite (ε_n) tendant vers 0, la série $\sum a_n \varepsilon_n$ converge.

6.1. Prouver que pour toute suite (ε_n) tendant vers 0, la série $\sum |a_n| \varepsilon_n$ converge.

6.2. En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

7. Soit maintenant une série $\sum a_n$ vérifiant la propriété (P_2).

7.1. Prouver que la suite (a_n) est bornée.

7.2. Soit (ε_n) une suite tendant vers 0. Prouver que la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge.

7.3. Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

8. Caractériser les séries vérifiant la propriété (P_2).