Devoir surveillé n° 3 (4h)

—

Intégrales généralisées - Endomorphismes et matrices carrées

<u>**Avertissements**</u>

- *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, seront pris en compte dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.*
- *Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- ***L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit.***
- *L'épreuve est constituée de <u>deux</u> problèmes indépendants :*
  - ⋆ *le premier sur les intégrales généralisées est à choisir entre le problème 1A (niveau INP) et le problème 1B (niveau Mines).*
  - ⋆ *le second sur les endomorphismes et matrices carrées (problème 2) est imposé.*

Problème 1A (INP) - intégrales généralisées

Pour α réel en n entier strictement positif, on considère l'intégrale généralisée :

$$I_{n,\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle qu'une intégrale généralisée est dite semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Partie 1 - Cas $n = 1$.

Dans cette partie, on étudie la convergence des intégrales $I_{1,\alpha} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Étude du cas $\alpha > 1$.*
Montrer que si $\alpha \geqslant 2$, alors l'intégrale $I_{1,\alpha}$ diverge, et que si $1 < \alpha < 2$, alors l'intégrale $I_{1,\alpha}$ converge absolument.

2. *Étude du cas $0 < \alpha \leqslant 1$.*
On suppose dans cette question que $0 < \alpha \leqslant 1$.

a. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha}$.

d. Déduire des questions précédentes que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ est semi-convergente dans ce cas.

3. *Étude du cas $\alpha \leqslant 0$.*
On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant 0$, et on pose $v_n = \displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|v_{n+1} - v_n| \geqslant \dfrac{2}{n^\alpha \pi^\alpha}$.

b. En déduire que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ diverge dans ce cas.

4. On pose, pour a et b réels, $J_{a,b} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^b \sin(t^a)\,\mathrm{d}t$.

a. Que dire de l'intégrale $J_{0,b}$?

b. Dans le cas $a \neq 0$, montrer que l'intégrale $J_{a,b}$ est de même nature (absolument convergente, semi-convergente ou divergente) que l'intégrale $I_{1,1-\frac{b+1}{a}}$.

c. Représenter graphiquement, dans un même système d'axes, les domaines du plan suivants :

- $D_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid J_{a,b}$ converge absolument$\}$.
- $D_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid J_{a,b}$ est semi-convergente$\}$.
- $D_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid J_{a,b}$ diverge$\}$.

Partie 2 - Cas $n = 3$ et $\alpha = 2$.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'intégrale $I_{3,2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

5. Montrer que l'intégrale $I_{3,2}$ converge absolument.

6. Soit $\varepsilon > 0$. En linéarisant $\sin^3(t)$, montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_\varepsilon^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

7. Établir que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2} - \dfrac{1}{t}$ est bornée sur son domaine de définition.

8. En déduire la valeur de $I_{3,2}$.

Partie 3 - Cas $n = \alpha$.

Dans cette partie, on s'intéresse aux intégrales $A_n = I_{n,n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t$.

On admet que $A_1 = \dfrac{\pi}{2}$ (la convergence de cette intégrale a été établie dans la partie 1).

9. Établir que pour tout $n \geqslant 2$, l'intégrale A_n converge absolument.

10. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

11. Soit $n \geqslant 2$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = \sin^n(t)$.

a. Justifier que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, la dérivée k-ème $g_n^{(k)}$ de g_n est telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g_n^{(k)}(t) = P_k(\cos(t))\sin^{n-k}(t),$$

où P_k est un polynôme à coefficients entiers qu'il n'est pas demandé d'expliciter.

b. Soit $k \in [\![0;n-2]\!]$. Établir la convergence des intégrales suivantes et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n-k-1}\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}}\,\mathrm{d}t.$$

c. En déduire que $A_n = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

12. Calculer les intégrales A_2 et A_3.

— fin du problème 1A —

Problème 1B (Mines) - intégrales généralisées

Avertissement : on prendra soin de justifier systématiquement la convergence des intégrales impropres rencontrées, même si cela n'est pas explicitement demandé.

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel u :

$$0 < f(u)e^{-u^2/2} \leqslant \frac{e^{-\rho u^2}}{\rho}.$$

On note H_0, le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u.$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0.

1. *Question de cours.*
Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et ψ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de I sur J.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur ψ' pour que ψ^{-1} soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, et rappeler, lorsque cette condition est vérifiée, l'expression de la dérivée de ψ^{-1}.

2. Soit $\rho > 0$. Justifier que la fonction $u \mapsto e^{-\rho u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Expliciter $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho u^2}\mathrm{d}u$ en fonction de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

3. Soit F_f la fonction définie par :

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)e^{-u^2/2}\mathrm{d}u.$$

On notera qu'en particulier, $F_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u.$

Montrer que F_f est une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $]0; \sqrt{2\pi}[$.

4. Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u.$$

5. Montrer que φ est une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que pour tout x réel :

$$\varphi'(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{f(\varphi(x))e^{-\varphi(x)^2/2}}.$$

7. Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(v))e^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v.$$

8. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geqslant A$, on ait :

$$\int_{x}^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\mathrm{d}u \geqslant \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}.$$

9. Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel x tel que $|x| \geqslant B$, on ait :

$$|\varphi(x)| \leqslant e^{(|x|+1)^2/4}.$$

10. Comparer les intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

11. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (x\varphi(x) - x^2 - \varphi'(x) + 1)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

— fin du problème 1B —

Problème 2 (Centrale) - Endomorphismes et matrices nilpotents

La partie I de ce problème démontre quelques résultats sur les matrices et les endomorphismes nilpotents et aborde l'étude de cas particuliers qui seront généralisés dans la partie II.

Notations et rappels

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de M.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $M^{k+1} = M\, M^k$.
On dit que M est *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.

De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $u^{k+1} = u \circ u^k$.
Et on dit que u est *nilpotent* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de u.
On notera que vu ces définitions, si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors u est nilpotent d'indice p si et seulement si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p.

On pose $J_1 = (0)$ et, pour tout entier $\alpha \geqslant 2$, on note J_α la matrice carrée de taille α dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première sous-diagonale qui valent 1 :

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C}).$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \cdots, A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note :

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

I - Premiers résultats

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 1$.

1. Que peut-on dire de u si $p = 1$?

2. Soit x un vecteur non nul de E et $s \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $u^{s-1}(x) \neq 0_E$ et $u^s(x) = 0_E$. Montrer que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant s-1}$ est libre.

Indication : on pourra considérer une combinaison linéaire $\sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$ *et son image par une (ou des) puissance(s) de* u *bien choisie(s).*

3. En déduire que $p \leqslant n$.

I.A - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2.

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2.

4. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2.

6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

I.B - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

7. Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.

8. On suppose que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u)$.
Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E tels que la famille

$$\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)\big)$$

est une base de E, et donner la matrice de u dans cette base.

9. On suppose $\operatorname{Im}(u) \neq \operatorname{Ker}(u)$.
Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ de $\operatorname{Ker}(u)$ tels que la famille

$$\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}\big)$$

est une base de E. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

I.C - Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une *racine carrée* de V si $R^2 = V$.
On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

I.C.1) On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

10. Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

11. Démontrer que A est semblable à la matrice $\operatorname{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que $A = P \operatorname{diag}(J_2, J_1)\, P^{-1}$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$. On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à R.

12. Démontrer que $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.

13. En déduire l'ensemble des racines carrées de A.
Indication : on pourra considérer $R' = P^{-1}RP$.

I.C.2) On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

14. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6, puis l'ensemble des solutions de l'équation.

I.C.3) En général, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

15. Montrer que, si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

16. Pour toute valeur de l'entier $n \geqslant 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geqslant 2$ et admettant au moins une racine carrée.

II - Deuxième partie

On cherche dans cette partie à généraliser les résultats des sous-parties I.A et I.B.

II.A - Réduction des matrices nilpotentes

On suppose $n \geqslant 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

17. Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$ est nilpotent d'indice $p - 1$.

18. Pour tout vecteur x non nul de E, on note $s(x)$ le plus petit entier de l'intervalle $[\![1;p]\!]$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$, et $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant s(x)-1}$.

Démontrer que $C_u(x)$ est stable par u, que $\left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ est une base de $C_u(x)$, et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.

19. Démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_t$ de E tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i).$$

Indication : on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.

20. Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

II.B - Applications

21. Soient A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à A. Déterminer deux vecteurs x_1 et x_2 de $\mathbb{R}^5$ tels que $\mathbb{R}^5 = C_u(x_1) \oplus C_u(x_2)$.

22. À l'aide du résultat de la question **20**, démontrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors M, $2M$ et M^T sont semblables.

— fin du problème 2 —