Devoir surveillé n° 4

—

Corrigé

Problème 1 (extrait et adapté de Agro-Véto 2005)

1. Les variables X_1 et X_2 désignent le nombre de succès (obtenir Π, de probabilité $p = \frac{1}{2}$) en n tentatives indépendantes, donc X_1 et X_2 suivent la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

2. L'événement $\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}$ est l'événement « les deux séries de lancers ont donné exactement k piles », donc $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} \big(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}\big)$.

3. Les événements $\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}$, pour $k \in [\![0;n]\!]$, sont deux à deux incompatibles, donc par σ-additivité $P(A_n) = \sum_{k=0}^{n} P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\})$.
De plus par l'indépendance admise, on a $P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}) = P(X_1 = k)P(X_2 = k)$.
Et par **1**, on a $P(X_1 = k) = P(X_2 = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.
D'où finalement $P(A_n) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

4. a. Par définition des coefficients binomiaux, le cardinal de $\mathcal{P}$ est $\binom{2n}{n}$.

b. Pour constituer une partie à n éléments de E contenant k boules noires, et donc $n-k$ boules blanches, on a $\binom{n}{k}$ choix pour les k boules noires (nombre de façons de choisir k éléments parmi n), et $\binom{n}{n-k}$ choix pour les $n-k$ boules blanches (nombre de façons de choisir $n-k$ éléments parmi n). Le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_k$ de toutes ces parties est donc $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

c. Comme $\mathcal{P}$ est la réunion de ses parties $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$, et que celles-ci sont deux à deux disjointes, on a $\mathrm{Card}(\mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k)$, c'est-à-dire $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

5. On a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, donc vu **3** et **4c**, $P(A_n) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

6. Par formule des probabilités composées, $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$.
Or $P(A_1) = \frac{1}{2}$ par **5** (c'est la probabilité d'obtenir le même côté de la pièce lors des 1ers lancers des deux séries), et si $A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}$ est réalisé, alors la probabilité d'obtenir A_k est la probabilité d'obtenir le même côté de la pièce lors des k-èmes lancers des deux séries, donc là encore, $P_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k) = \frac{1}{2}$. Ainsi $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{1}{2^n}$.

7. On vient de voir que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, donc a fortiori, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pour $i \neq j$, donc les événements $A_1, \dots, A_n$ ne sont pas deux à deux incompatibles.
Et $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$ par **7**, alors que $P(A_1) = \frac{1}{2}$ et $P(A_2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ par **5**, donc $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1) \cap P(A_2)$, de sorte que A_1 et A_2 ne sont pas indépendants, et donc a fortiori, les événements $A_1, \dots, A_n$ ne sont pas mutuellement indépendants.

8. Par **5**, $P(A_n) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.
On déduit de la formule de Stirling les équivalents $(2n)! \sim (\frac{2n}{e})^{2n}\sqrt{4\pi n} = 2^{2n}(\frac{n}{e})^{2n}2\sqrt{\pi n}$ et $(n!)^2 \sim \big((\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}\big)^2 = (\frac{n}{e})^{2n}2\pi n$. D'où en divisant : $P(A_n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
Cela montre que $P(A_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

9. Par définition, la variable S peut prendre n'importe quelle valeur entière supérieure ou égale à 2, et éventuellement la valeur $+\infty$, donc $S(\Omega) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\} \cup \{+\infty\} = [\![2;+\infty]\!]$.

10. L'événement $\{S = 2\}$ est réalisé ssi les deux premiers lancers donnent Π, donc par indépendance de ces lancers, $s_2 = P(S = 2) = p^2$.
De même, l'événement $\{S = 3\}$ est réalisé ssi les trois premiers lancers sont Φ-Π-Π, donc $s_3 = qp^2$.

11. Notons respectivement Π_k et Φ_k les événements « on obtient pile au k-ème lancer » et « on obtient face au k-ème lancer ». Par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(\Pi_k) = p$ et $P(\Phi_k) = q$.

- On a $U_n \cap U_{n+1} = \emptyset$ (puisque $U_n \subset \Pi_n$, que $U_{n+1} \subset \Phi_n$, et que $\Pi_n \cap \Phi_n = \emptyset$), on a donc $P(U_n \cap U_{n+1}) = 0$ et $P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{P(U_n \cap U_{n+1})}{P(U_n)} = 0$.

- On a $V_n \cap U_{n+1} = V_n \cap \Pi_{n+1}$, donc par indépendance du $(n+1)$-ème lancer vis à vis des précédents, $P(V_n \cap U_{n+1}) = P(V_n)P(\Pi_{n+1}) = pP(V_n)$ et $P_{V_n}(U_{n+1}) = \frac{P(V_n \cap U_{n+1})}{P(V_n)} = p$.
- De même, on a $U_n \cap V_{n+1} = U_n \cap \Phi_{n+1}$, donc $P_{U_n}(V_{n+1}) = q$.
- De même, on a $V_n \cap V_{n+1} = V_n \cap \Phi_{n+1}$, donc $P_{V_n}(V_{n+1}) = q$.

12.
- On a $\{S = n+1\} = U_n \cap \Pi_{n+1}$, donc comme en **11**, $s_{n+1} = P(U_n)P(\Pi_{n+1}) = pu_n$.
- On a $U_{n+1} = V_n \cap U_{n+1}$, donc $u_{n+1} = P(U_{n+1}) = P(V_n)P_{V_n}(U_{n+1}) = pv_n$ par **11**.
- On a $V_{n+1} = (V_{n+1} \cap U_n) \cup (V_{n+1} \cap V_n)$ avec $(V_{n+1} \cap U_n)$ et $(V_{n+1} \cap V_n)$ incompatibles (car U_n et V_n le sont). Donc par σ-additivité, $v_{n+1} = P(V_{n+1}) = P(V_{n+1} \cap U_n) + P(V_{n+1} \cap V_n) = P(U_n)P_{U_n}(V_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(V_{n+1}) = qu_n + qv_n$.

13. Par **12** pour $n \geqslant 2$, $s_{n+2} = pu_{n+1} = p^2 v_n = p^2 q(u_{n-1} + v_{n-1}) = pqs_n + qs_{n+1}$.

14. Puisque r_1 et r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique de la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vue en **13** (de discriminant $\Delta = q^2 + 4pq > 0$), la suite $(w_n)_{n\geqslant 2}$ de terme général $w_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r_1^{n-1} - r_2^{n-1})$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(s_n)_{n\geqslant 2}$.
De plus, $w_2 = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r_1 - r_2) = p^2 = s_2$ et $w_3 = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r_1^2 - r_2^2) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = qp^2 = s_3$.
Ainsi les suites $(s_n)_{n\geqslant 2}$ et $(w_n)_{n\geqslant 2}$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2 et ont les mêmes deux premiers termes, donc ces deux suites sont égales (on a $\forall\, n \geqslant 2$, $s_n = w_n$ par récurrence immédiate). On a donc bien, pour tout $n \geqslant 2$, $s_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r_1^{n-1} - r_2^{n-1})$.
Rq. Alternativement, on peut dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geqslant 2$, $s_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, et trouver α et β au vu des valeurs de s_2 et s_3, mais c'est un peu plus calculatoire.

15. On vérifie que les deux racines r_1 et r_2 définies en **14** appartiennent à $]-1;1[$, soit en montrant que $\sqrt{\Delta} < 2 - q < 2 + q$, soit par le théorème des valeurs intermédiaires, en remarquant que $x^2 - qx - pq$ est strictement négatif en $x = 0$, et strictement positif en $x = 1$ et en $x = -1$ (...).
Donc les deux séries géométriques $\sum_{n\geqslant 2} r_1^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} r_2^{n-1}$ convergent et elles ont pour somme $\sum_{n=2}^{+\infty} r_1^{n-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} r_1^k = \frac{r_1}{1-r_1}$ et de même $\sum_{n=2}^{+\infty} r_2^{n-1} = \frac{r_2}{1-r_2}$.
Ainsi par linéarité, la série $\sum_{n\geqslant 2} s_n$ converge et a pour somme $\sum_{n=2}^{+\infty} s_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{r_1}{1-r_1} - \frac{r_2}{1-r_2}\right)$.
Or $\frac{r_1}{1-r_1} - \frac{r_2}{1-r_2} = \frac{r_1(1-r_2) - r_2(1-r_1)}{(1-r_1)(1-r_2)} = \frac{r_1 - r_2}{1 - r_1 - r_2 + r_1 r_2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{1 - q - pq} = \frac{\sqrt{\Delta}}{p^2}$ car $q = 1 - p$.
Donc on a bien $\sum_{n=2}^{+\infty} s_n = 1$.

16. L'événement « on n'obtient jamais deux piles consécutifs » est l'événement $\{S = +\infty\}$, donc le complémentaire de l'événement $\{S \text{ est fini}\} = \bigcup_{n=2}^{+\infty}\{S = n\}$.
Or les événements $\{S = n\}$ sont deux à deux incompatibles, donc par σ-additivité, $P(S \text{ est fini}) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(S = n) = 1$ par **15**. Donc $P(S = +\infty) = 0$.
Ainsi l'événement « on n'obtient jamais deux piles consécutifs », et est de probabilité nulle.

Problème 2A (extrait et adapté de E3A PSI 2014)

1. Vu la relation de récurrence, on a $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$.

2. Montrons par récurrence (double) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
- *Initialisation.* C'est vrai pour $n \in \{1; 2\}$ puisque $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$.
- *Hérédité.* Soit $n \geqslant 1$ tel que le résultat est vrai aux rangs n et $n+1$.
  Alors $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ est un polynôme de degré $n+2$, comme différence de $2XT_{n+1}$ de degré $n+2$ et de T_n de degré n, et a pour coefficient dominant le double de celui de T_{n+1}, à savoir $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

3. Les polynômes $T_0, \dots, T_n$ sont non nuls et échelonnés en degré, donc ils forment une famille libre, de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Avec la relation $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$, appliqué à $a = (n+1)\theta$ et $b = \theta$, on trouve :

- $\cos((n+2)\theta) = \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$, et
- $\cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) + \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$,

d'où le résultat voulu en ajoutant les deux égalités.

5. Montrons par récurrence (double) que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

- *Initialisation.* C'est vrai pour $n \in \{0;1\}$ puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = X$.
- *Hérédité.* Soit $n \geqslant 1$ tel que le résultat est vrai aux rangs n et $n+1$.
  Alors $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, donc $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$ par hypothèse de récurrence et par **4**.
  Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

6. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $x \mapsto \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur l'intervalle $]-1;1[$.
La fonction cos réalise une bijection strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$. Le changement de variable $x = \cos\theta$ est donc valide dans l'intégrale généralisée définissant $(P|Q)$ et montre qu'en cas de convergence de l'une des deux intégrales ci-dessous, on a la convergence de l'autre et l'égalité :

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{P(\cos\theta)Q(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

puisque pour tout $\theta \in]0;\pi[$, $\sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{\sin^2(\theta)} = \sin(\theta)$ car $\sin(\theta) \geqslant 0$.
Or la dernière intégrale est convergente, puisque faussement impropre en 0 et en π (car la fonction $\theta \mapsto P(\cos\theta)Q(\cos\theta)$ y est continue), donc la formule est validée.

7. L'application $(\cdot\,|\,\cdot)$ est bien définie de $\mathbb{R}[X]^2$ dans $\mathbb{R}$ par la question précédente.
Elle est symétrique de façon évidente, et bilinéaire par linéarité de l'intégrale.
Montrons qu'elle est définie-positive. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $f : x \mapsto \frac{P(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ est positive et continue sur $]-1;1[$, donc par positivité de l'intégrale, $(P|P) = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, avec égalité ssi f est nulle sur $]-1;1[$, i.e. ssi $P(x) = 0$ pour tout $x \in]-1;1[$, i.e. ssi $P = 0$ (seul polynôme ayant une infinité de racines).
L'application $(\cdot\,|\,\cdot)$ est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

8. Avec les mêmes relations qu'en **4**, on a $\cos(p\theta)\cos(q\theta) = \frac{1}{2}(\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta))$, donc

$$I_{p,q} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((p+q)\theta)\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((p-q)\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Or $\int_0^\pi \cos(k\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi$ si $k=0$, et $\int_0^\pi \cos(k\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\sin(k\theta)}{k}\right]_0^\pi = 0$ si $k \in \mathbb{Z}^*$.
Donc $I_{p,q} = 0$ si $p \neq q$ (car alors $p \pm q \in \mathbb{Z}^*$), puis $I_{0,0} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ (car $0 \pm 0 = 0$), et pour $p \geqslant 1$, $I_{p,p} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ (car alors $p + p \in \mathbb{N}^*$ et $p - p = 0$).

9. Vu **6** et **5**, on a $(T_p|T_q) = \int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,\mathrm{d}\theta = I_{p,q}$.
On a donc $(T_p|T_q) = 0$ si $p \neq q$, $(T_0|T_0) = \pi$ et $(T_p|T_p) = \frac{\pi}{2}$ si $p \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi la base $(T_0, \dots, T_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ (vue en **3**) est orthogonale, mais pas orthonormale.

10. T_n étant orthogonal à $T_0, \dots, T_{n-1}$, il est orthogonal à $\mathrm{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

11. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, tout élément de $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose de façon unique en une combinaison linéaire des éléments de cette famille. D'où l'existence et l'unicité des réels $b_0, \dots, b_n$ tels que $X^n = \sum_{k=0}^n b_k T_k$.
Rq. Et comme cette base est orthogonale, la famille $(\frac{T_0}{\|T_0\|}, \dots, \frac{T_n}{\|T_n\|})$ est orthonormale, et on a donc $b_k = \frac{(X^n|T_k)}{\|T_k\|^2}$ (coordonnées en B.O.N.).

12. Puisque T_k est de degré k et de coefficient dominant égal à 2^{k-1} pour $k \geqslant 1$ par **2**, et que $T_0 = 1$, l'égalité des termes de degré n dans l'égalité $X^n = \sum_{k=0}^n b_k T^k$ de **11** donne $X^n = b_n 2^{n-1} X^n$, donc $1 = b_n 2^{n-1}$, donc $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

13. Notons q la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(T_n)$. Il s'agit de calculer $q(X^n)$.
Méthode 1.
Vu **12**, on a $X^n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k T_k$, avec $\frac{1}{2^{n-1}}T_n \in \mathrm{Vect}(T_n)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} b_k T_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} b_k T_k \in (\mathrm{Vect}(T_n))^\perp$ vu **10**. Donc cette décomposition de X^n est sa décomposition dans la somme $\mathbb{R}[X] = \mathrm{Vect}(T_n) \oplus \mathrm{Vect}(T_n)^\perp$, de sorte que par définition de q, on a $q(X^n) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$.
Méthode 2.
Comme $(\frac{T_n}{\|T_n\|})$ est une base orthonormale de la droite $\mathrm{Vect}(T_n)$, la formule de projection orthogonale montre que le projeté orthogonal de X^n sur $\mathrm{Vect}(T_n)$ est $q(X^n) = \frac{(X^n|T_n)}{\|T_n\|^2}T_n$.
Mais en multipliant scalairement l'égalité de **11** par T_n, on obtient par linéarité $(X^n|T_n) = b_n(T_n|T_n) = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$, puisque T_n est orthogonal à $T_0, \dots, T_{n-1}$ par **9**, et que $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ par **12**. Donc $q(X^n) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$.

14. Plaçons-nous dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire de la partie II.
On note que $\int_{-1}^1 \frac{(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \|X^n - Q\|^2$, où $Q = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Donc $I_{\mathrm{inf}} = \inf\limits_{Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]} \|X^n - Q\|^2$.
Or d'après le théorème de la projection orthogonale, on sait que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\|X^n - Q\| \geqslant \|X^n - p(X^n)\|$, avec égalité ssi $Q = p(X^n)$, où p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Donc $I_{\mathrm{inf}} = \|X^n - p(X^n)\|^2 = \|q(X^n)\|^2$, où $q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} - p$ est la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}_n[X])^\perp$, i.e. vu **10**, où q est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(T_n)$.
Ainsi par **13**, $I_{\mathrm{inf}} = \|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\|^2 = (\frac{1}{2^{n-1}})^2\|T_n\|^2 = \frac{(T_n|T_n)}{2^{2n-2}}$, et donc vu **9**, $I_{\mathrm{inf}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$.

15.
- Les réels θ_k, pour $k \in [\![1;n]\!]$, sont deux à deux distincts dans $[0;\pi]$, et cos est injective sur cet intervalle, donc les réels $x_k = \cos(\theta_k)$, pour $k \in [\![1;n]\!]$, sont deux à deux distincts.
- Vu **5**, on a pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $T_n(x_k) = T_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = \cos(\frac{(2k-1)\pi}{2}) = 0$.
  Donc les x_k, pour $k \in [\![1;n]\!]$, sont des racines de T_n. Or ces x_k sont au nombre de n et T_n est de degré n, donc il ne peut pas avoir d'autre racine. Ainsi les x_k, pour $k \in [\![1;n]\!]$, sont bien les racines de T_n.

16.
- Soit $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Posons $Q = \sum_{k=1}^n R(x_k)L_k$.
  Alors pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $Q(x_j) = \sum_{k=1}^n R(x_k)L_k(x_j) = R(x_j)$ puisque $L_k(x_j) = 0$ si $k \neq j$ et $L_j(x_j) = 1$.
  Ainsi le polynôme $R - Q$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$ (car R et Q le sont) et admet les n réels $x_1, \dots, x_n$ comme racines, donc $R - Q = 0$, i.e. $R = Q$.
- On a montré que la famille $(L_1, \dots, L_n)$ engendre $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et qu'on a la décomposition voulue de tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Et comme la famille génératrice $(L_1, \dots, L_n)$ est de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, on peut conclure que c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

17. Par linéarité de l'intégrale avec la décomposition vue en **16**, on a :
$$\forall\, R \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^1 \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \lambda_k R(x_k)$$
pour $\lambda_k = \int_{-1}^1 \frac{L_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, qui ne dépend que de $x_1, \dots, x_n$, tout comme L_k.
Rq. On note que toutes ces intégrales sont bien convergentes comme cas particuliers de **6**.

18. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Notons $P = T_nQ + R$ la division euclidienne de P par T_n.
Par définition de cette division, on a $\deg(R) < \deg(T_n) = n$, et puisque $\deg(P) \leqslant 2n-1$, on a aussi $\deg(Q) \leqslant n-1$ (sinon, on aurait $\deg(QT_n) = \deg(Q) + \deg(T_n) > n + \deg(T_n) = 2n$).
On a alors $\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ par linéarité.
Mais alors $\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = (T_n|Q) = 0$ par **10**, et $\int_{-1}^1 \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \lambda_k R(x_k)$ par **17**.
Enfin en évaluant la division euclidienne en x_k, on obtient $P(x_k) = T_n(x_k)Q(x_k) + R(x_k) = R(x_k)$ puisque $T_n(x_k) = 0$ par **15**.
Ainsi on a bien $\forall\, P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(x_k)$.

Problème 2B (extrait et adapté de Mines-Ponts MP 1998)

1. Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. Par définition de φ_k, on a $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_k) \Leftrightarrow P$ admet pour racines $0, 1, \ldots, n \Leftrightarrow P$ est multiple du polynôme $A_n = \prod_{i=0}^{n}(X - i)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi_k)$ est l'ensemble des multiples de A_n de degré inférieur ou égal à k. Or A_n est de degré $n + 1$, donc :

- Si $k \leqslant n$, alors $\mathrm{Ker}(\varphi_k) = \{0\}$ puisque le seul multiple de A_n de degré $\leqslant k$ est 0.
- Si $k \geqslant n + 1$, alors $\mathrm{Ker}(\varphi_k) = \{A_n Q \mid Q \in \mathbb{R}_{k-n-1}[X]\}$.

2. Vu **1**, φ_n est linéaire et injective entre deux espaces de même dimension finie (à savoir $n + 1$), donc c'est un isomorphisme. Ainsi l'élément $y = (y_0, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ a un unique antécédent $Y \in \mathbb{R}_n[X]$ par φ_n. Autrement dit, il existe un unique $Y \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $y = \varphi_n(Y)$, i.e. tel que $\forall\, i \in [\![0; n]\!]$, $y_i = Y(i)$.

3. On a manifestement, pour tout $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $\Delta_k(P) \geqslant 0$ (somme de termes positifs), et en particulier $\Delta_k(Y) = 0$, avec $Y \in \mathbb{R}_k[X]$ puisque $\deg(Y) \leqslant n \leqslant k$. Donc $m_k = 0$ si $n \leqslant k$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\Delta_k(P) = 0$ ssi $\forall\, i \in [\![0; n]\!]$, $P(i) = y_i$, i.e. ssi $\varphi_k(P) = \varphi_k(Y)$, i.e. ssi $P - Y \in \mathrm{Ker}(\varphi_k)$, i.e. ssi $P = Y + H$ où $H \in \mathrm{Ker}(\varphi_k)$, i.e. ssi $P = Y + A_n Q$ où $Q \in \mathbb{R}_{k-n-1}[X]$ avec les notations de **1** (dans le cas $k = n$, on a $Q = 0$ et la seule solution est $P = Y$).

4.
- L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par $\langle P|Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$, et elle est clairement symétrique, bilinéaire et positive.

  De plus si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est tel que $\langle P|P\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)^2 = 0$, i.e. tel que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, $P(i) = 0$, alors $P = 0$ (seul polynôme de degré $\leqslant n$ ayant $n + 1$ racines distinctes).

  Ainsi $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- Et pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\langle XP|Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} iP(i)Q(i) = \sum_{i=0}^{n} P(i)iQ(i) = \langle P|XQ\rangle$.
- On trouve $\|1\|^2 = \langle 1|1\rangle = \sum_{i=0}^{n} 1 = n + 1$ et $\langle X|1\rangle = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

5.
- On a $\Delta_k(P) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - P(i))^2 = \sum_{i=0}^{n}(Y(i) - P(i))^2 = \langle Y - P|Y - P\rangle = \|Y - P\|^2$.
- Par le théorème de la projection orthogonale, pour tout $P \in \mathbb{R}_k[X]$, on a $\|Y-P\|^2 \geqslant \|Y-P_k\|^2$, où P_k est le projeté orthogonal de Y sur $\mathbb{R}_k[X]$, avec égalité si et seulement si $P = P_k$.

  Donc $m_k = \|Y - P_k\|^2$, et P_k, le projeté orthogonal de Y sur $\mathbb{R}_k[X]$, est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ tel que $m_k = \|Y - P_k\|^2$.
- Par définition de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_k[X]$, on a $Y - P_k \in \mathbb{R}_k[X]^\perp$, i.e. $Y - P_k$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$.

6. Vu **5**, P_0 est le projeté orthogonal de Y sur $\mathbb{R}_0[X]$, droite vectorielle dirigée par 1, donc aussi par le vecteur normé $\frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Ainsi la formule de projection orthogonale en base orthonormale donne $P_0 = \frac{\langle Y|1\rangle}{\|1\|^2}1 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i = \overline{y}$. Et on a alors $m_0 = \|Y - P_0\|^2 = \sum_{i=0}^{n}(y_i - \overline{y})^2$.

7.
- Notons $(E_0, E_1, \ldots, E_n)$ l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par le procédé de Gram-Schmidt. Par construction, c'est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, $\deg(E_i) = i$, puisque E_0 est non nul et colinéaire à 1, donc de degré 0, et pour tout $i \geqslant 1$, E_i est colinéaire à un polynôme de la forme $X^i - Q_i$ où $Q_i \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$ (précisément, Q_i est le projeté orthogonal de X^i sur $\mathbb{R}_{i-1}[X]$), donc E_i est de degré i.

  Notons alors c_i le coefficient dominant de E_i et posons $B_i = \frac{1}{c_i}E_i$. Alors par construction, la famille $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, B_i est de degré i et de coefficient dominant égal à 1.

  Rq. On a en fait exactement $B_0 = 1$, et pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $B_i = X^i - Q_i$, avec les notations ci-dessus. Autrement dit, les B_i sont les E_i avant normalisation (i.e. $E_i = \frac{B_i}{\|B_i\|}$).
- En particulier, B_0 est de degré 0 et unitaire, donc $B_0 = 1$, et $B_1 = X - \frac{\langle X|1\rangle}{\|1\|^2}1 = X - \frac{n}{2}$ vu **4**.

8.
- On a vu en **5** que P_k est la projection orthogonale de Y sur $\mathbb{R}_k[X]$.

  Or vu **7**, la famille $(\frac{B_0}{\|B_0\|}, \frac{B_1}{\|B_1\|}, \ldots, \frac{B_k}{\|B_k\|})$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$, donc par formule de projection orthogonale en base orthonormale, on a $P_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle Y|B_i\rangle}{\|B_i\|^2}B_i$.

- La relation $P_k = P_{k-1} + \frac{\langle Y|B_k\rangle}{\|B_k\|^2} B_k$ est immédiate vu les expressions de P_k et P_{k-1} obtenues au point précédent.
- Et on a $m_k = \|Y - P_k\|^2$, or $\|Y\|^2 = \|(Y - P_k) + P_k\|^2 = \|Y - P_k\|^2 + \|P_k\|^2$ par Pythagore, puisque $(Y - P_k)$ et P_k sont orthogonaux, et à nouveau par Pythagore puisque les B_i sont deux à deux orthogonaux, $\|P_k\|^2 = \sum_{i=0}^{k} \|\frac{\langle Y|B_i\rangle}{\|B_i\|^2} B_i\|^2 = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle Y|B_i\rangle^2}{\|B_i\|^2}$.

  Ainsi $m_k = \|Y - P_k\|^2 = \|Y\|^2 - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle Y|B_i\rangle^2}{\|B_i\|^2}$.

  En comparant cette formule et l'analogue pour m_{k-1}, on obtient $m_k = m_{k-1} - \frac{\langle Y|B_k\rangle^2}{\|B_k\|^2}$.

9.
- Vérifions que $U_i = B_i(n - X)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{i-1}[X]$. Par linéarité, il suffit pour cela de montrer que $\forall\, p \in [\![0; i-1]\!]$, $\langle U_i|X^p\rangle = 0$. Mais pour tout $p \in [\![0; i-1]\!]$, on a :

  $$\langle U_i|X^p\rangle = \sum_{j=0}^{n} U_i(j)\, j^p = \sum_{j=0}^{n} B_i(n-j)\, j^p \underset{\ell=n-j}{=} \sum_{\ell=0}^{n} B_i(\ell)(n-\ell)^p = \langle B_i|(n-X)^p\rangle$$

  et $(n - X)^p \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$ car $p \leqslant i - 1$. Or B_i est orthogonal à $B_0, \ldots, B_{i-1}$ par construction, donc à $\mathrm{Vect}(B_0, \ldots, B_{i-1}) = \mathbb{R}_{i-1}[X]$, donc $\langle U_i|X^p\rangle = \langle B_i|(n - X)^p\rangle = 0$.
- Ainsi $U_i \in \mathbb{R}_{i-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_i[X]$ qui est une droite vectorielle contenant B_i. Il en résulte que U_i et B_i sont proportionnels. Or B_i est de coefficient dominant égal à 1 et $U_i = B_i(n - X)$ est de coefficient dominant égal à $(-1)^i$, donc nécessairement $B_i(n - X) = (-1)^i B_i$.

10.
- On a $\langle XB_i|B_j\rangle = \langle B_i|XB_j\rangle$ par **4**, et B_i est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{i-1}[X]$, donc à XB_j si $j \leqslant i - 2$, donc $\langle XB_i|B_j\rangle = \langle B_i|XB_j\rangle = 0$ dans ces conditions.
- Considérons la décomposition de XB_i, qui est de degré $i + 1$, dans la base orthogonale $(B_0, \ldots, B_i, B_{i+1})$ de $\mathbb{R}_{i+1}[X]$: $XB_i = \sum_{j=0}^{i+1} \beta_j\, B_j$.

  En multipliant scalairement cette relation par B_ℓ, pour $\ell \in [\![0; i-2]\!]$, et en tenant compte de l'orthogonalité de $(B_0, \ldots, B_i, B_{i+1})$ et du point précédent, on trouve $\langle XB_i|B_\ell\rangle = 0 = \sum_{j=0}^{i+1} \beta_j \langle B_j|B_\ell\rangle = \beta_\ell \|B_\ell\|^2$, donc $\beta_\ell = 0$ pour $j \leqslant i - 2$. Ainsi la décomposition de XB_i ci-dessus se simplifie en :

  $$XB_i = \beta_{i-1}\, B_{i-1} + \beta_i\, B_i + \beta_{i+1}\, B_{i+1}$$

  d'où le résultat voulu en renommant β_{i-1} en α_i et β_{i+1} en γ_i.

11. En multipliant scalairement l'égalité de **10** par B_i, et en tenant compte de l'orthogonalité de $(B_0, \ldots, B_n)$, on trouve $\langle XB_i|B_i\rangle = \beta_i \|B_i\|^2$. Or vu **9**, on a $B_i(X) = (-1)^i B_i(n - X)$, donc :

$$\begin{aligned}
\langle XB_i|B_i\rangle &= (-1)^i \langle XB_i|B_i(n-X)\rangle = (-1)^i \sum_{j=0}^{n} j\, B_i(j) B_i(n-j) \\
&\underset{\ell=n-j}{=} (-1)^i \sum_{\ell=0}^{n} (n-\ell) B_i(n-\ell) B_i(\ell) = \sum_{\ell=0}^{n} (n-\ell) B_i(\ell) B_i(\ell) \\
&= n \sum_{\ell=0}^{n} B_i(\ell) B_i(\ell) - \sum_{\ell=0}^{n} \ell B_i(\ell) B_i(\ell) = n\langle B_i|B_i\rangle - \langle XB_i|B_i\rangle
\end{aligned}$$

donc $2\langle XB_i|B_i\rangle = n\langle B_n|B_i\rangle = n\|B_i\|^2$ et ainsi $\beta_i = \frac{n}{2}$.

12.
- En considérant les termes de degré $i + 1$ dans l'égalité de **10**, on trouve $X^{i+1} = \gamma_i X^{i+1}$, donc $\gamma_i = 1$, puisque pour tout $j \in [\![0; n]\!]$, B_j est unitaire et de degré j.
- En multipliant scalairement l'égalité de **10** par B_{i+1}, et en tenant compte de l'orthogonalité de $(B_0, \ldots, B_n)$, on trouve alors $\langle XB_i|B_{i+1}\rangle = \gamma_i \langle B_{i+1}|B_{i+1}\rangle = \|B_{i+1}\|^2$.

  Rq. Pour couvrir le cas $i = 1$ de **13**, il faut vérifier que la formule obtenue ici est encore valable pour $i = 0$, ce qui est bien le cas en partant de la décomposition $XB_0 = X = \beta_0 B_0 + \gamma_0 B_1$.

13.
- En multipliant scalairement l'égalité de **10** par B_{i-1}, et en tenant compte de l'orthogonalité de $(B_0, \ldots, B_n)$, on trouve $\langle XB_i|B_{i-1}\rangle = \alpha_i \langle B_{i-1}|B_{i-1}\rangle = \alpha_i \|B_{i-1}\|^2$.

  Or $\langle XB_i|B_{i-1}\rangle = \langle B_i|XB_{i-1}\rangle$ par **4**, et par **12** appliqué à $i - 1$ au lieu de i, on sait que $\langle B_i|XB_{i-1}\rangle = \|B_i\|^2$.

  En comparant les deux calculs, on a donc $\alpha_i \|B_{i-1}\|^2 = \|B_i\|^2$, donc $\alpha_i = \frac{\|B_i\|^2}{\|B_{i-1}\|^2}$.
- Avec les valeurs de α_i, β_i et γ_i trouvées ci-dessus, la relation de **10** se ré-écrit :

  $$XB_i = \frac{\|B_i\|^2}{\|B_{i-1}\|^2} B_{i-1} + \frac{n}{2} B_i + B_{i+1}, \text{ i.e. } B_{i+1} = (X - \tfrac{n}{2}) B_i - \frac{\|B_i\|^2}{\|B_{i-1}\|^2} B_{i-1}$$

  Or $X - \frac{n}{2} = B_1$ par **7**, d'où finalement :

  $$B_{i+1} = B_1 B_i - \frac{\|B_i\|^2}{\|B_{i-1}\|^2} B_{i-1}.$$