Devoir surveillé n° 4 (4h)

—

espaces probabilisés - espaces euclidiens

Avertissements

- *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, seront pris en compte dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.*
- *Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- ***L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit.***
- *L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants :*
  - ⋆ *le problème 1 sur les espaces probabilisés est imposé,*
  - ⋆ *le problème 2 sur les espaces vectoriels euclidiens est à choisir entre un problème de type E3A (problème 2A) et un problème de type Mines (problème 2B).*

Problème 1 - espaces probabilisés

Dans ce problème, on étudie deux aspects d'un jeu de pile ou face, effectué avec une pièce de monnaie non nécessairement équilibrée.
Par convention, la lettre Π désignera le résultat pile, obtenu avec une probabilité $p \in]0;1[$, et la lettre Φ désignera le résultat face, obtenu avec la probabilité $q = 1 - p$.
Les résultats de différents lancers seront considérés comme mutuellement indépendants.

Partie 1 - obtention du même nombre de pile dans deux séries de n lancers

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 1$ et on effectue deux séries de n lancers de la pièce, qu'on suppose équilibrée ($p = q = \frac{1}{2}$). Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on considère l'événement :

$$A_i = \text{« Les } i \text{ premiers lancers ont donné le même nombre de } \Pi \text{ dans les deux séries ».}$$

Par exemple, si deux séries de 5 lancers ont donné les résultats suivants :

n° du lancer :	1	2	3	4	5
série n°1 :	Π	Π	Φ	Π	Φ
série n°2 :	Φ	Π	Π	Φ	Π

alors les événements A_3 et A_5 sont réalisés, mais A_1, A_2 et A_4 ne le sont pas.

1. On note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de Π obtenus dans la première série de n lancers, et X_2 celle donnant le nombre de Π obtenus dans la seconde.
Quelle est la loi des variables aléatoires X_1 et X_2 ?

2. Exprimer l'événement A_n à l'aide des événements $\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$.

3. En admettant l'indépendance des événements $\{X_1 = k\}$ et $\{X_2 = k\}$, en déduire que :

$$P(A_n) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

On cherche dans les questions suivantes à calculer une expression simplifiée de $P(A_n)$.

4. On considère un ensemble E constitué de $2n$ boules dont n sont noires et n sont blanches.

a. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties à n éléments de E. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}$?

b. On note, pour $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des parties à n éléments de E contenant k boules noires (et donc $n-k$ boules blanches). Déterminer le cardinal de $\mathcal{P}_k$.

c. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

5. Montrer alors que :

$$P(A_n) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

6. Calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$.

7. Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont-ils deux à deux incompatibles ? mutuellement indépendants ?

8. Donner un équivalent simple et la limite de $P(A_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On rappelle la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Partie 2 - obtention de deux piles consécutifs

Dans cette partie, on lance la pièce autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir deux piles consécutifs. On ne suppose plus la pièce équilibrée a priori ($p \in]0;1[$ est quelconque).

On note S la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Π consécutifs (par convention, on pose $S = +\infty$ si l'on n'obtient jamais deux Π consécutifs).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note aussi U_n et V_n les événements suivants :

- $U_n =$ « Les n premiers lancers ne donnent pas deux Π consécutifs, et le n-ième donne Π ».
- $V_n =$ « Les n premiers lancers ne donnent pas deux Π consécutifs, et le n-ième donne Φ ».

Par exemple, la suite de lancers $(\Pi, \Phi, \Phi, \Phi, \Pi, \Phi, \Pi, \Pi)$ réalise l'événement $\{S = 8\}$, ainsi que les événements U_1, V_2, V_3, V_4, U_5, V_6 et U_7 (mais pas U_8).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s_n = P(S = n)$, $u_n = P(U_n)$ et $v_n = P(V_n)$ les probabilités des événements $\{S = n\}$, U_n et V_n respectivement.

9. Quel est l'ensemble $S(\Omega)$ des valeurs prises par S ?

10. Calculer s_2 et s_3 en fonction de p et $q = 1 - p$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer en fonction de p et q, les probabilités conditionnelles :

$$P_{U_n}(U_{n+1}),\ \ P_{U_n}(V_{n+1}),\ \ P_{V_n}(U_{n+1})\ \ \text{et}\ \ P_{V_n}(V_{n+1}).$$

12. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+1} = pu_n$, $\ u_{n+1} = pv_n\ $ et $\ v_{n+1} = q(u_n + v_n)$.

13. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $s_{n+2} = qs_{n+1} + pqs_n$.

14. On pose $\Delta = q^2 + 4pq$, $r_1 = \dfrac{q + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{q - \sqrt{\Delta}}{2}$. Justifier que :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad s_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r_1^{n-1} - r_2^{n-1}).$$

Indication : on pourra remarquer que $r_1 + r_2 = q$, $r_1 - r_2 = \sqrt{\Delta}$ *et* $r_1 r_2 = -pq$.

15. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} s_n = 1$.

16. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir deux piles consécutifs ?

— fin du problème 1 —

Problème 2A (E3A) - espaces vectoriels euclidiens

Dans tout le problème, on considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Partie I.

1. Expliciter T_2 et T_3.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant égal à 2^{n-1}.

3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$.

5. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Partie II.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

6. Vérifier, à l'aide d'un changement de variable soigneusement justifié, que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente et que :

$$(P|Q) = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta.$$

7. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot)$ ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans toute la suite, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

8. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
Montrer que si $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$, puis calculer $I_{p,p}$ (on distinguera les cas $p = 0$ et $p \neq 0$).

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

10. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Partie III.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cette partie est de calculer la borne inférieure suivante :

$$I_{\text{inf}} = \inf_{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{-1}^{1} \frac{(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \right).$$

11. Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telle que $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k T_k$.

12. Montrer que $b_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

13. Expliciter, en fonction de b_n et T_n, le projeté orthogonal de X^n sur la droite $\mathrm{Vect}(T_n)$.

14. En déduire, à l'aide du théorème de la projection orthogonale, la valeur de I_{inf}.

Partie IV.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

15. Vérifier que les réels x_k, pour $k \in [\![1;n]\!]$, sont deux à deux distincts, et sont les racines du polynôme T_n.

16. On note, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, L_k le polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ admettant pour racines les réels x_j pour $j \in [\![1;n]\!]$ avec $j \neq k$, et valant 1 en x_k, i.e. le polynôme défini par :

$$L_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}.$$

Montrer que la famille $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que :

$$\forall R \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad R(X) = \sum_{k=1}^{n} R(x_k) L_k(X).$$

17. En déduire l'existence de réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne dépendant que de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que :

$$\forall R \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} \frac{R(X)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k R(x_k).$$

18. Justifier que la relation de la question précédente est plus généralement valable pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, i.e. que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} \frac{P(X)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(x_k).$$

Indication : on pourra considérer la division euclidienne de P par T_n.

— fin du problème 2A —

Problème 2B (Mines) - espaces vectoriels euclidiens

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de $n+1$ nombres réels.
L'objet du problème est de déterminer, pour tout entier naturel k, les polynômes P de degré inférieur ou égal à k, tels que le réel $\Delta_k(P)$ défini par la relation suivante

$$\Delta_k(P) = \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - P(i)\big)^2$$

soit minimum et de préciser la valeur m_k de ce minimum.

Partie 1 - Préliminaires.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note φ_k l'application de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_k[X], \quad \varphi_k(P) = \big(P(0), P(1), \ldots, P(n)\big) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Il est admis que cette application φ_k est linéaire.

1. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(\varphi_k)$, en distinguant les cas $k \leqslant n$ et $k > n$.

2. À l'aide de la question précédente, montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $Y \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que, pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, $Y(i) = y_i$.

Cette notation du polynôme Y associé à la famille $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est conservée dans toute la suite du problème.

3. On suppose dans cette question que k est supérieur ou égal à n. Déterminer dans ce cas la valeur du minimum m_k du réel $\Delta_k(P)$ défini par la relation

$$\Delta_k(P) = \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - P(i)\big)^2$$

où P est un polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$.
Quels sont les polynômes P de $\mathbb{R}_k[X]$ pour lesquels l'expression $\Delta_k(P)$ est minimale ?

Partie 2 - Étude du cas $k < n$.

Dans toute la suite, on considère un entier k strictement inférieur à n.
Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\langle P|Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i).$$

4. Montrer que l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, qui vérifie de plus la propriété : $\forall\, P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle XP|Q\rangle = \langle P|XQ\rangle$.
Calculer en particulier les produits scalaires $\langle 1|1\rangle$ et $\langle 1|X\rangle$.

Dans toute la suite, on munit $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

5. Soit Y le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ associé à la famille $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ (défini en question **2**).
Déduire des conventions précédentes la relation suivante :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_k[X], \quad \Delta_k(P) = \|Y - P\|^2.$$

Justifier alors l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ pour lequel le réel $\Delta_k(P_k)$ est égal au minimum m_k des réels $\Delta_k(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_k[X]$:

$$m_k = \|Y - P_k\|^2.$$

Définir le polynôme P_k au moyen de Y et de $\mathbb{R}_k[X]$.
Que dire du polynôme $Y - P_k$ vis-à-vis du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$?

6. Expliciter P_0 et m_0 en fonction des réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et de leur moyenne $\overline{y} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i$.

7. Justifier l'existence d'une famille orthogonale $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, B_i est de degré i et unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1).
Expliciter B_0 et B_1.

8. Déterminer alors, en fonction des polynômes Y et $B_0, B_1, \ldots, B_k$, une expression du polynôme P_k défini à la question **5**. En déduire, pour $k \geqslant 1$, les relations :

$$P_k = P_{k-1} + \frac{\langle Y|B_k\rangle}{\|B_k\|^2} B_k \quad \text{et} \quad m_k = m_{k-1} - \frac{\langle Y|B_k\rangle^2}{\|B_k\|^2}.$$

La fin de cette partie est consacrée à l'établissement d'une relation de récurrence d'ordre deux entre les polynômes B_i.

9. Démontrer que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, le polynôme $B_i(n - X)$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{i-1}[X]$.
En déduire que $B_i(n - X) = (-1)^i B_i(X)$.

10. Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$.
Démontrer que pour tout $j \in [\![0; i-2]\!]$, les polynômes XB_i et B_j sont orthogonaux.
En déduire qu'il existe des réels α_i, β_i et γ_i tels que :

$$XB_i = \alpha_i B_{i-1} + \beta_i B_i + \gamma_i B_{i+1}.$$

11. Déterminer, en calculant $\langle XB_i|B_i\rangle$ à l'aide de la question **9**, la valeur du réel β_i.

12. Justifier que $\gamma_i = 1$ et en déduire la valeur de $\langle XB_i|B_{i+1}\rangle$ en fonction de $\|B_{i+1}\|^2$.

13. Déterminer enfin le réel α_i en fonction de $\|B_i\|^2$ et $\|B_{i-1}\|^2$, puis déduire des résultats précédents la relation :

$$B_{i+1} = B_1 B_i - \frac{\|B_i\|^2}{\|B_{i-1}\|^2} B_{i-1}.$$

— fin du problème 2B —