

## Devoir surveillé n° 5

## Corrigé

## Problème 1 (extrait et adapté de CCINP PC 2013)

**Q1.** Voir le cours.

**Q2.** On sait que  $\forall x \in [0; 1[$ ,  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ .

Soit  $u \in [0; 1[$ . On applique alors le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions  $\sum g_n$ , où  $g_n : x \mapsto x^n$ , sur le segment  $[0; u]$  :

- La série  $\sum g_n$  converge simplement sur  $[0; u]$  et sa somme est la fonction  $G : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ .
- Les fonctions  $g_n$  et  $G$  sont continues (donc continues par morceaux) sur  $[0; u]$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  est intégrable sur  $[0; u]$ , et  $\int_0^u |g_n(x)| dx = \int_0^u x^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ .
- La série  $\sum \frac{u^{n+1}}{n+1}$  converge (car  $u \in ]0; 1[$ ), par critère de d'Alembert ou par comparaison à la série géométrique  $\sum u^{n+1}$  (ou en faisant appel aux séries entières).

Ainsi le théorème s'applique et montre que  $G$  est intégrable sur  $[0; u]$  (évident ici), et que :

$$-\ln(1-u) = \int_0^u \frac{1}{1-x} dx = \int_0^u G(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^u g_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}.$$

**Rq.** On aurait aussi pu appliquer le théorème d'interversion entre une somme et une intégrale sur un segment, qui nécessite la convergence uniforme (voir un exemple du cours), ou encore faire appel au cours sur les séries entières.

**Q3.** On applique maintenant le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} h_n$ , où  $h_n : u \mapsto \frac{u^{n-1}}{n}$ , sur l'intervalle  $]0; 1[$  :

- La série  $\sum_{n \geq 1} h_n$  converge simplement sur  $]0; 1[$  et sa somme est la fonction  $H : u \mapsto -\frac{\ln(1-u)}{u}$  d'après la question précédente.
- Les fonctions  $h_n$  et  $H$  sont continues (donc continues par morceaux) sur  $]0; 1[$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_n$  est intégrable sur  $]0; 1[$ , et  $\int_0^1 |h_n(u)| du = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{n} du = \frac{1}{n^2}$ .
- La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge (série de Riemann de paramètre  $2 > 1$ ).

Ainsi le théorème s'applique et montre que  $H : u \mapsto -\frac{\ln(1-u)}{u}$  est intégrable sur  $]0; 1[$  et que :

$$\int_0^1 H(u) du = -\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 h_n(u) du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

**Q4.** Voir le cours.

**Q5.** On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  sur l'intervalle  $[0; 1[$ , où  $f_n : x \mapsto f(t^n)$  :

- Pour tout  $t \in [0; 1[$ , on a  $t^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $f_n(t) = f(t^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$  par continuité de  $f$ .

Donc la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement vers la fonction constante égale à  $f(0)$  sur  $[0; 1[$ .

- Les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[0; 1[$  (par composition de fonctions continues), et leur limite l'est évidemment (c'est une fonction constante).
- Pour tout  $t \in [0; 1[$  et tout  $n \geq 1$ , on a  $0 \leq t^n \leq t < 1$ , donc par croissance et positivité de  $f$  sur  $[0; 1[$ , on a  $|f_n(t)| = f(t^n) \leq f(t)$ . Et la fonction  $f$  est intégrable sur  $[0; 1[$  par hypothèse.

Ainsi le théorème s'applique et montre que les fonctions  $f_n$  et leur limite sont intégrables sur  $]0; 1[$  (c'est évident ici pour la limite), donc  $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt = \int_0^1 f_n(t) dt$  est bien défini, et que :

$$I_n = \int_0^1 f(t^n) dt = \int_0^1 f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t^n) dt = \int_0^1 f(0) dt = f(0).$$

- Q6.** • Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $\varphi : u \mapsto u^{\frac{1}{n}}$  réalise une bijection croissante et de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0; 1[$  sur lui-même, de dérivée  $\varphi' : u \mapsto \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1}$ .

Donc le changement de variable  $t = u^{\frac{1}{n}}$  est légitime dans l'intégrale  $nI_n = n \int_0^1 f(t^n) dt$  (avec  $dt = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du$ ), et stipule que les intégrales écrites ci-dessous sont de même nature, donc convergentes vu **Q5**, et que l'on a l'égalité :

$$nI_n = n \int_0^1 f(t^n) dt = \int_0^1 f(u) u^{\frac{1}{n}-1} du = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{n}} du.$$

- On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 1}$  sur l'intervalle  $]0; 1[$ , où  $g_n : u \mapsto \frac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{n}}$  :

★ Pour tout  $u \in ]0; 1[$ , on a  $u^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(u)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , donc  $g_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u}$ .

Donc la suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  converge simplement vers la fonction  $g : u \mapsto \frac{f(u)}{u}$  sur  $]0; 1[$ .

★ Les fonctions  $g_n$  et  $g$  sont continues (donc continues par morceaux) sur  $]0; 1[$ .

★ Pour tout  $u \in ]0; 1[$  et tout  $n \geq 1$ , on a  $0 \leq u^{\frac{1}{n}} \leq 1$ , donc  $|g_n(u)| \leq \left| \frac{f(u)}{u} \right| = |g(u)|$ , et la fonction  $g$  est intégrable sur  $]0; 1[$  par hypothèse.

Ainsi le théorème s'applique et montre que les fonctions  $g_n$  et  $g$  sont intégrables sur  $]0; 1[$  (ce qui est déjà donné par **Q5** et par hypothèse sur  $f$ ), et que :

$$nI_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{n}} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du.$$

- Q7.** La fonction  $f : u \mapsto -\ln(1-u)$  est continue, croissante et positive sur  $]0; 1[$  (...).

De plus par **Q3**, la fonction  $g : u \mapsto \frac{f(u)}{u} = -\frac{\ln(1-u)}{u}$  est intégrable sur  $]0; 1[$ .

Et comme  $f$  et  $g$  sont équivalentes en 1, on en déduit que  $f$  est intégrable sur  $]0; 1[$ .

Cela montre que l'on peut appliquer les questions **Q5** et **Q6** à  $f$  pour conclure avec **Q3** que :

$$-J_n = \int_0^1 f(t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) = 0 \text{ et que } -nJ_n = n \int_0^1 f(t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du = \frac{\pi^2}{6}.$$

Donc  $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $nJ_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\pi^2}{6}$ , i.e.  $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\pi^2}{6n}$ .

- Q8.** La série géométrique  $\sum x^n$  converge ssi  $|x| < 1$ , donc le domaine de définition de  $F_1$  est  $] -1; 1[$ .

On a de plus  $\forall x \in ] -1; 1[$ ,  $F_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$  puis par dérivation directe,  $F_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

On a donc évidemment  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F_1(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 F_1'(x) = 1$ .

- Q9. a.** Soit  $x \in ]0; 1[$ . Notons que pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $u = x^t = e^{t \ln(x)} \Leftrightarrow \ln(u) = t \ln(x) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(u)}{\ln(x)}$ .

L'application  $\varphi : u \mapsto \frac{\ln(u)}{\ln(x)}$  réalise une bijection décroissante (car  $\ln(x) < 0$ ) et de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0; 1[$  sur  $]0; +\infty[$ , de dérivée  $\varphi' : u \mapsto \frac{1}{u \ln(x)}$ .

Donc le changement de variable  $u = x^t$ , i.e.  $t = \frac{\ln(u)}{\ln(x)}$ , est légitime dans l'intégrale  $G(x) = \int_0^1 f(x^t) dt$  (avec  $dt = \frac{du}{u \ln(x)}$ ), et stipule que les intégrales écrites ci-dessous sont de même nature, et qu'en cas de convergence, on a l'égalité :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t) dt = \int_0^1 \frac{f(u)}{u |\ln(x)|} du = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du.$$

Or par hypothèse, la fonction  $g : u \mapsto \frac{f(u)}{u}$  est intégrable sur  $]0; 1[$ , donc la dernière intégrale converge (absolument), donc la première aussi.

Ainsi  $G(x)$  est bien défini et  $G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ .

**b.** La fonction  $f$  est croissante et continue sur  $]0; 1[$ , et la fonction  $t \mapsto x^t = e^{t \ln(x)}$  est décroissante (car  $\ln(x) < 0$ ) et continue sur  $]0; +\infty[$  et à valeurs dans  $]0; 1[$ , donc par composition, la fonction  $h : t \mapsto f(x^t)$  est continue et décroissante sur  $]0; +\infty[$ . Ainsi :

- $\forall t \in ]n; n+1[$ ,  $f(x^t) = h(t) \leq h(n) = f(x^n)$ , donc  $\int_n^{n+1} f(x^t) dt \leq \int_n^{n+1} f(x^n) dt = f(x^n)$  par croissance de l'intégrale (et car  $f(x^n)$  ne dépend pas de  $t$ ), et de même,
- $\forall t \in ]n-1; n[$ ,  $f(x^t) = h(t) \geq h(n) = f(x^n)$ , donc  $\int_{n-1}^n f(x^t) dt \geq \int_{n-1}^n f(x^n) dt = f(x^n)$ .

On a donc bien l'encadrement  $\int_n^{n+1} f(x^t) dt \leq f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t) dt$ .

**c.** Puisque la fonction  $h : t \mapsto f(x^t)$  est continue, positive et décroissante sur  $]0; +\infty[$  (voir **Q9b**), le théorème de comparaison série-intégrale nous assure que la série  $\sum h(n) = \sum f(x^n)$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} h(t) dt = \int_0^{+\infty} f(x^t) dt$  sont de même nature.

Or par **Q9a**, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x^t) dt$  converge, donc la série  $\sum f(x^n)$  aussi, ce qui assure l'existence de sa somme  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$ .

De plus en sommant les encadrements de **Q9b** pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on obtient par relation de Chasles :

$$\int_1^{+\infty} f(x^t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x^t) dt \leq F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^n f(x^t) dt = \int_0^{+\infty} f(x^t) dt.$$

**d.** Le majorant dans l'encadrement de **Q9c** est  $G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$  par **Q9a**.

Et le même changement de variable qu'en **Q9a**, qui réalise une bijection de  $]0; x[$  sur  $]1; +\infty[$ , montre que le minorant vaut  $\int_1^{+\infty} f(x^t) dt = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^x \frac{f(u)}{u} du$ .

On a donc, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $-\frac{1}{\ln(x)} \int_0^x \frac{f(u)}{u} du \leq F(x) \leq -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ , et donc :

$$\forall x \in ]0; 1[, \quad -\frac{1-x}{\ln(x)} \int_0^x \frac{f(u)}{u} du \leq (1-x)F(x) \leq -\frac{1-x}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du.$$

Or l'équivalent usuel  $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (x-1)$  montre que  $-\frac{1-x}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} 1$ .

Et par définition des intégrales convergentes, on a  $\int_0^x \frac{f(u)}{u} du \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ .

Ainsi par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ .

**Q10. a.** La fonction  $x \mapsto 1 - x^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; a]$  et y est à valeurs dans  $]0; 1]$ , et la fonction  $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1]$ , donc par composition, la fonction  $f_n : x \mapsto -\ln(1 - x^n)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; a]$ , et par formule de dérivation usuelle d'une composée :

$$\forall x \in [0; a], \quad f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}.$$

De plus, pour tout  $x \in [0; a]$ , on a  $0 \leq x^n \leq a^n < 1$ , donc  $1 - x^n \geq 1 - a^n > 0$ , donc  $0 < \frac{1}{1-x^n} \leq \frac{1}{1-a^n}$ , donc  $0 \leq f'_n(x) \leq \frac{na^{n-1}}{1-a^n}$ .

**b.** On applique le théorème de dérivation (pour la classe  $\mathcal{C}^1$ ) à la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  sur le segment  $[0; a]$  :

- Pour  $x = 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$  est la série nulle, donc elle converge.

Pour  $x \in ]0; a]$ , on a  $|x| \leq a < 1$ , donc  $x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ , donc  $-\ln(1 - x^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$ .

Or la série géométrique  $\sum x^n$  converge (car  $|x| < 1$ ), donc par comparaison entre termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} f_n(x) = -\sum_{n \geq 1} \ln(1 - x^n)$  converge.

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur le segment  $[0; a]$ .

- Pour tout  $n \geq 1$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; a]$  par **Q10a**.

- Par **Q10a**, on a  $\|f'_n\|_{\infty, [0; a]} \leq \frac{na^{n-1}}{1-a^n}$ , donc  $\|f'_n\|_{\infty, [0; a]} = O_{n \rightarrow +\infty}(na^{n-1})$ .

Or la série  $\sum_{n \geq 1} na^{n-1}$  converge par critère de d'Alembert (ou en faisant appel aux séries entières), donc par comparaison entre termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{\infty, [0; a]}$  converge.

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge normalement, donc uniformément, sur le segment  $[0; a]$ .

Ainsi le théorème s'applique, donc  $F_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; a[$  et  $F_2' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ .

Ceci étant valable pour tout  $a \in ]0; 1[$ , ce résultat s'étend à l'intervalle  $]0; 1[$ .

- c. On a vu en **Q7** que la fonction  $f : u \mapsto -\ln(1-u)$  satisfait toutes les hypothèses nécessaires pour lui appliquer **Q9**, donc par **Q9d** et au vu de **Q3** :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F_2(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du = -\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \frac{\pi^2}{6}.$$

- d. • On applique le principe de **Q9** pour encadrer la somme  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$  par deux intégrales (dépendant de  $x$ ), avec la technique de comparaison série-intégrale.

On fixe  $x \in ]0, 1[$  et on pose  $h : t \mapsto \frac{tx^t}{1-x^t}$ , fonction positive sur  $\mathbb{R}_+$ , prolongeable par continuité en 0 (par l'équivalent usuel  $x^t - 1 = e^{t \ln(x)} - 1 \sim t \ln(x)$  quand  $t \rightarrow 0$ ), et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) = \frac{(x^t + t \ln(x)x^t)(1-x^t) + tx^t \ln(x)x^t}{(1-x^t)^2} = \frac{x^t}{(1-x^t)^2} \underbrace{(1-x^t + t \ln(x))}_{\varphi(t)}.$$

Donc  $h'$  est du signe de la fonction  $\varphi$  définie ci-dessus, qui est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(t) = -\ln(x)x^t + \ln(x) = \ln(x)(1-x^t) < 0, \quad (\text{car } x \in ]0, 1[).$$

Donc  $\varphi$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , et comme  $\varphi(0) = 0$ , elle est négative sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi  $h$  est décroissante, continue et positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc le théorème de comparaison série-intégrale s'applique et stipule que la série  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.

Or la série  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  converge, car  $f(n) = \frac{nx^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx^n$ , et car la série  $\sum nx^n$  converge par critère de d'Alembert (ou avec les séries entières), donc l'intégrale converge et on obtient comme en **Q9** :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Le changement de variable  $t = \frac{\ln(u)}{\ln(x)}$ , pour lequel  $u = x^t$  et  $dt = \frac{du}{u \ln(x)}$ , déjà utilisé et justifié à la question **Q9**, donne alors :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = -\frac{1}{(\ln x)^2} \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} f(t) dt = -\frac{1}{(\ln x)^2} \int_0^x \frac{\ln(u)}{1-u} du.$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{(\ln x)^2} \int_0^x \frac{\ln(u)}{1-u} du \leq S(x) \leq -\frac{1}{(\ln x)^2} \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du.$$

On conclut alors comme en **Q9d** que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 S(x) = -\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du = \frac{\pi^2}{6}$ , puisque cette dernière intégrale est convergente et égale à celle de **Q3** par le changement de variable  $u = 1-v$  (...).

- Vu **Q10ab**, on a  $\forall x \in ]0; 1[$ ,  $F_2'(x) = \frac{S(x)}{x}$ , donc  $(1-x)^2 F_2'(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} (1-x)^2 S(x)$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 F_2'(x) = \frac{\pi^2}{6}.$$

## Problème 2A (extrait de CCINP PSI 2020)

- Q1.** On trouve facilement, par exemple via les opérations  $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$  puis  $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ , que l'on a  $\chi_A(X) = X(X^2 - 4) = X(X-2)(X+2)$ .

- Q2.** Vu **Q1**, le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé, et ses racines 0, 2 et  $-2$  sont simples.

Donc  $A$  est diagonalisable ses valeurs propres sont 0, 2 et  $-2$ , et ses trois sous-espaces propres sont tous de dimension 1 (cas où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples).

**Q3.** On trouve facilement, par exemple via les opérations  $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$  puis  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ , que l'on a  $\chi_B(X) = X(X^2 + 4) = X(X - 2i)(X + 2i)$ . On a bien alors :

$$i\chi_B(iX) = i(iX)(iX + 2i)(iX - 2i) = i^4 X(X + 2)(X - 2) = X(X + 2)(X - 2) = \chi_A(X).$$

**Q4.** Comme  $\chi_B$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , la matrice  $B$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Par contre  $\chi_B$  est scindé et à racines simples sur  $\mathbb{C}$ , donc  $B$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

Les valeurs propres de  $B$  sont les racines de  $\chi_B$ , i.e.  $0$ ,  $2i$  et  $-2i$  vu **Q3**.

Et ses sous-espaces propres (sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{C}$ ) sont tous de dimension 1, puisque les racines de  $\chi_B$  sont simples (la dimension du sous-espaces propre étant comprise entre 1 et la multiplicité de la valeur propre associée).

**Q5.** On a :

$$\begin{aligned} D^{-1}AD &= \begin{pmatrix} 1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc  $D^{-1}AD = -iB$ .

**Rq.** On aurait aussi pu déterminer  $D^{-1}AD$  à l'aide de la formule du changement de base : c'est la matrice de l'endomorphisme  $X \mapsto AX$  de  $\mathbb{C}^3$  canoniquement associé à  $A$  dans la base  $(E_1, iE_2, -E_3)$ , où  $(E_1, E_2, E_3)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{C}^3$ .

**Q6.** Comme en **Q5** :

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}A\Delta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice  $\Delta^{-1}A\Delta$  est donc symétrique et à coefficients réels, donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme  $A$  est semblable à une matrice diagonalisable, elle est elle-même diagonalisable.

**Q7.** Considérons donc des scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  tels que  $\sum_{k=0}^n \alpha_k f_k = 0$ , i.e. tels que :

$$(\star) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 \sin^n(x) + \alpha_1 \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \dots + \alpha_n \cos^n(x) = 0.$$

- Le cas  $x = 0$  donne  $\alpha_n = 0$  puisque  $\sin(0) = 0$  et  $\cos(0) = 1$ .
- Supposons montré que  $\alpha_n = \dots = \alpha_{n-p+1} = 0$  pour un certain  $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . L'égalité  $(\star)$  se simplifie alors en :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 \sin^n(x) + \alpha_1 \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \dots + \alpha_{n-p} \cos^{n-p}(x) \sin^p(x) = 0.$$

Pour tout  $x \in ]0; \pi[$ , on a  $\sin(x) \neq 0$ , donc on peut donc diviser cette égalité par  $\sin^p(x)$  pour obtenir :

$$\forall x \in ]0; \pi[, \quad \alpha_0 \sin^{n-p}(x) + \alpha_1 \cos(x) \sin^{n-p-1}(x) + \dots + \alpha_{n-p} \cos^{n-p}(x) = 0.$$

En faisant tendre  $x$  vers  $0^+$  dans cette égalité, on obtient  $\alpha_{n-p} = 0$ .

- Par récurrence décroissante, on obtient ainsi  $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$ , donc la famille  $(f_0, \dots, f_n)$  est libre.

Comme de plus, la famille  $(f_0, \dots, f_n)$  engendre  $V_n$  (par définition de  $V_n$ ), on en déduit que c'est une base de  $V_n$ . On a donc  $\dim(V_n) = \text{Card}((f_0, \dots, f_n)) = n + 1$ .

**Q8.** On a  $f_0 = \sin^n$ , donc  $f'_0 = n \cos \sin^{n-1} = n f_1$ , donc  $f'_0 \in V_n$ .

De même, on a  $f_n = \cos^n$ , donc  $f'_n = -n \cos^{n-1} \sin = -n f_{n-1}$ , donc  $f'_n \in V_n$ .

Soit  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ . On a alors  $f_k = \cos^k \sin^{n-k}$ , donc en dérivant ce produit :

$$\begin{aligned} f'_k &= -k \sin \cos^{k-1} \sin^{n-k} + (n-k) \cos^k \cos \sin^{n-k-1} \\ &= -k \cos^{k-1} \sin^{n-(k-1)} + (n-k) \cos^{k+1} \sin^{n-(k+1)} \\ &= -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1} \end{aligned}$$

donc  $f'_k \in V_n$  en tant que combinaison linéaire de vecteurs de  $V_n$ .

Nous avons donc bien démontré que  $f'_k \in V_n$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et donc par linéarité de la dérivation on en déduit :

$$\forall f \in V_n, \quad f' \in V_n$$

(nous disons ici implicitement que pour montrer la stabilité d'un espace vectoriel par un endomorphisme, il suffit de vérifier la stabilité sur une famille génératrice). Cela prouve que l'application  $\varphi_n : f \mapsto f'$  va bien de  $V_n$  dans  $V_n$ , et comme elle est évidemment linéaire, c'est un endomorphisme de  $V_n$ .

Les calculs des  $f'_k = \varphi_n(f_k)$  faits ci-dessus montrent alors que la matrice de  $\varphi_n$  dans la base  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est bien la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

comme annoncé.

**Q9.** On a immédiatement, grâce aux propriétés de l'exponentielle complexe :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{ikx} e^{i(k-n)x} = (e^{ix})^k (e^{-ix})^{n-k} = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}.$$

**Q10.** Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . D'après **Q9** et la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} g_k &= (\cos + i \sin)^k (\cos - i \sin)^{n-k} \\ &= \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cos^j (i \sin)^{k-j} \right) \left( \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} \cos^\ell (-i \sin)^{n-k-\ell} \right) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{\ell} (-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell} \cos^{\ell+j} \sin^{n-(j+\ell)} \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{\ell} (-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell} f_{\ell+j} \end{aligned}$$

car  $\ell + j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  si  $0 \leq j \leq k$  et  $0 \leq \ell \leq n - k$ . Ceci démontre que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la fonction  $g_k$  est combinaison linéaire des fonctions  $f_0, \dots, f_n$  qui engendrent  $V_n$ , donc  $g_k \in V_n$ .

**Q11.** Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $g'_k = i(2k - n)g_k$ , (on dérive une fonction exponentielle), c'est-à-dire :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \varphi_n(g_k) = i(2k - n)g_k.$$

Comme de plus  $g_k \neq 0_{V_n}$ , ceci démontre que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $g_k$  est un vecteur propre de  $\varphi_n$ , associé à la valeur propre  $i(2k - n)$ .

Cela fournit  $n + 1$  valeurs propres distinctes de  $\varphi_n$ , qui est défini sur un espace vectoriel de dimension  $n + 1$  (voir **Q7**), donc on a ainsi trouvé toutes les valeurs propres de  $\varphi_n$ , et son polynôme caractéristique est scindé à racines simples :

$$\chi_{\varphi_n}(X) = \prod_{k=0}^n (X - i(2k - n)).$$

On en déduit que  $\varphi_n$  est diagonalisable, avec pour valeurs propres les imaginaires purs  $i(2k - n)$  pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , et que ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Puisque les sous-espaces propres sont de dimension 1, il suffit d'un vecteur propre pour les engendrer, et comme on l'a vu plus haut  $g_k$  est un vecteur propre associé à  $i(2k - n)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \text{Ker}(\varphi_n - i(2k - n)\text{Id}_{V_n}) = \{\alpha g_k \mid \alpha \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(g_k).$$

**Q12.** Comme  $\varphi_n$  est un endomorphisme défini sur un espace vectoriel de dimension finie, c'est un automorphisme si et seulement s'il est injectif, i.e. si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul, i.e. si et seulement si 0 n'est pas une de ses valeurs propres.

Or vu **Q11**, 0 est valeur propre de  $\varphi_n$  si et seulement s'il existe  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $2k - n = 0$ , i.e. si et seulement s'il existe  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $n = 2k$ , i.e. si et seulement si  $n$  est un entier pair.

Donc, à l'inverse :  $\varphi_n$  est un automorphisme de  $V_n$  si et seulement si  $n$  est un entier impair.

**Q13.** Le calcul de **Q10** dans le cas  $k = n$  donne :

$$g_n = (\cos + i \sin)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} i^{n-j} \cos^j \sin^{n-j} = \sum_{j=0}^n q_j f_j$$

avec la notation  $q_j = \binom{n}{j} i^{n-j}$  proposée.

Par **Q11**, on a  $\varphi_n(g_n) = i n g_n$ , et vu **Q8**, ce calcul se traduit alors matriciellement par :

$$B_n \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = i n \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \text{ de sorte que } \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B_n - i n I_{n+1}).$$

De plus vu **Q8**, les valeurs propres de  $B_n$  sont celles de  $\varphi_n$ , donc elles sont toutes simples (par **Q11**), de sorte que les sous-espaces propres de  $B_n$  sont tous de dimension 1. On a donc bien :

$$\text{Ker}(B_n - i n I_{n+1}) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \right).$$

**Q14.** Par définition du produit matriciel, on a  $DM = (\alpha_k m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq p}$  et  $MD = (m_{k,\ell} \alpha_\ell)_{1 \leq k, \ell \leq p}$ .

**Rq.** Il s'agit de l'encodage matriciel des opérations élémentaires  $L_k \leftarrow \alpha_k L_k$  et  $C_l \leftarrow \alpha_l C_l$  :

- multiplier  $M$  **à gauche** par la matrice diagonale  $D$  revient à multiplier la  $k^{\text{e}}$  **ligne** de  $M$  par le  $k^{\text{e}}$  coefficient diagonal de  $D$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  ;
- multiplier  $M$  **à droite** par la matrice diagonale  $D$  revient à multiplier la  $\ell^{\text{e}}$  **colonne** de  $M$  par le  $\ell^{\text{e}}$  coefficient diagonal de  $D$ , pour tout  $\ell \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

**Q15.** La matrice  $D_n^{-1}$  est la matrice diagonale dont le  $k^{\text{e}}$  coefficient diagonal est  $d_k^{-1} = i^{1-k}$ .

Ainsi par la question précédente, on a  $D_n^{-1} A_n D_n = (c_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n+1}$  où :

$$c_{k,\ell} = d_k^{-1} a_{k,\ell} d_\ell = i^{1-k} i^{\ell-1} a_{k,\ell} = i^{\ell-k} a_{k,\ell}.$$

En utilisant la définition des  $a_{k,\ell}$  donnée dans l'énoncé, on en déduit :

$$\begin{cases} c_{k,k+1} = i a_{k,k+1} = i k & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ c_{k,k-1} = i^{-1} a_{k,k-1} = -i(n-k+2) & \text{si } 2 \leq k \leq n+1, \\ c_{k,\ell} = 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On reconnaît immédiatement que  $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$ .

Ceci démontre notamment que les matrices  $A_n$  et  $-iB_n$  sont semblables, donc elles ont le même polynôme caractéristique. On en déduit :

$$\begin{aligned}\chi_{A_n}(X) &= \chi_{-iB_n}(X) = \det(XI_{n+1} + iB_n) \\ &= \det((-i)(iXI_{n+1} - B_n)) = (-i)^{n+1} \det(iXI_{n+1} - B_n) \\ &= (-i)^{n+1} \chi_{B_n}(iX).\end{aligned}$$

**Q16.** Vu la fin de **Q15**, et **Q8** qui donne  $\chi_{B_n} = \chi_{\varphi_n}$ , puis **Q11** qui donne  $\chi_{\varphi_n}$ , on a :

$$\begin{aligned}\chi_{A_n}(X) &= (-i)^{n+1} \chi_{B_n}(iX) = (-i)^{n+1} \prod_{k=0}^n (iX - i(2k - n)) \\ &= (-i)^{n+1} i^{n+1} \prod_{k=0}^n (X - (2k - n)) = \prod_{k=0}^n (X - (2k - n)).\end{aligned}$$

Donc  $\chi_{A_n}$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{R}$ , et ses racines sont les entiers  $2k - n$  pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Cela implique que  $A_n$  est diagonalisable, que ses valeurs propres sont les entiers  $2k - n$  pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , et que ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

De plus, avec les notations  $p_k = \binom{n}{k}$ ,  $q_k = i^{n-k} \binom{n}{k}$  et  $D_n = \text{Diag}(1, i, \dots, i^n)$ , on voit que :

$$D_n \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = i^n \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Or par **Q15**, on a  $A_n = -iD_nB_nD_n^{-1}$ , donc avec **Q13** :

$$A_n \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \frac{-i}{i^n} D_n B_n \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \frac{n}{i^n} D_n \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi puisque les sous-espaces propres de  $A_n$  sont tous de dimension 1, on peut conclure que :

$$\text{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \right).$$

**Q17.** Comme on a clairement  $N_k(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$  (car le nombre de boules dans l'urne  $U_1$  est forcément compris entre 0 et  $n$ ), les événements  $E_{k,\ell} = \{N_k = \ell\}$ , pour  $\ell \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , forment un système complet d'évènements.

**Q18.** Vu le protocole :

- si  $\ell \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , alors l'urne  $U_1$  contiendra  $\ell + 1$  ou  $\ell - 1$  boules à l'instant  $k + 1$ , selon que la boule choisie au hasard est dans l'urne  $U_2$  ou l'urne  $U_1$ .
- si  $\ell = 0$ , alors l'urne  $U_1$  contiendra nécessairement une boule à l'instant  $k + 1$  (car la boule choisie au hasard est forcément dans l'urne  $U_2$ ).
- Si  $\ell = n$ , alors l'urne  $U_1$  contiendra nécessairement  $n - 1$  boules à l'instant  $k + 1$  (car la boule choisie au hasard est forcément dans l'urne  $U_1$ ).

**Q19.** Vu **Q19**, on a :

- pour  $\ell = 0$ ,  $P_{E_{k,0}}(E_{k+1,1}) = 1$  et  $P_{E_{k,0}}(E_{k+1,j}) = 0$  dans tous les autres cas.
- pour  $\ell = n$ ,  $P_{E_{k,n}}(E_{k+1,n-1}) = 1$  et  $P_{E_{k,n}}(E_{k+1,j}) = 0$  dans tous les autres cas.



- pour  $\ell \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , sachant que l'urne  $U_1$  contient  $\ell$  boules à l'instant  $k$ , la boule choisie au hasard sera dans l'urne  $U_1$  avec probabilité  $\frac{\ell}{n}$ , et dans l'urne  $U_2$  avec probabilité  $\frac{n-\ell}{n}$ , donc :

$$P_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell-1}) = \frac{\ell}{n} \text{ et } P_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,\ell+1}) = \frac{n-\ell}{n}$$

et  $P_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j}) = 0$  dans tous les autres cas.

**Q20.** Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements  $(E_{k,\ell})_{0 \leq \ell \leq n}$ , on a :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(E_{k+1,j}) = \sum_{\ell=0}^n P_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j})P(E_{k,\ell}).$$

Grâce aux probabilités calculées dans la question précédente, on obtient bien :

- $P(E_{k+1,0}) = P_{E_{k,1}}(E_{k+1,0})P(E_{k,1}) = \frac{1}{n}P(E_{k,1})$ , les autres termes de la somme étant nuls.
- $P(E_{k+1,n}) = P_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n})P(E_{k,n-1}) = \frac{1}{n}P(E_{k,n-1})$ , les autres termes de la somme étant nuls.
- pour tout  $j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} P(E_{k+1,j}) &= P_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j})P(E_{k,j-1}) + P_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j})P(E_{k,j+1}) \\ &= \frac{n-(j-1)}{n}P(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}P(E_{k,j+1}), \end{aligned}$$

les autres termes de la somme étant nuls.

**Q21.** Les égalités de **Q20** s'écrivent matriciellement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Z_{k+1} = \begin{pmatrix} p_{k+1,0} \\ p_{k+1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{k+1,n-1} \\ p_{k+1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n}{n} & 0 & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \frac{3}{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{n} & 0 & \frac{n}{n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{k,n-1} \\ p_{k,n} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} A_n Z_k.$$

Par une récurrence immédiate (suite géométrique matricielle), on a donc bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Z_k = \left(\frac{1}{n} A_n\right)^k Z_0 = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0.$$

**Q22.** Puisqu'il est supposé que les  $n$  boules sont placées de manière équiprobable à l'instant  $n=0$ , chaque boule a une probabilité  $\frac{1}{2}$  d'être placée dans l'urne  $U_1$ . On en déduit que  $N_0$  compte le nombre de succès – être placé dans l'urne  $U_1$  – dans une suite de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès  $\frac{1}{2}$ .

Ainsi la loi  $\pi$  de  $N_0$  est la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{2}$ .

**Q23.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Dire que  $N_k$  a la même loi que  $N_0$  revient à dire que  $Z_k = Z_0$ . Or, d'après la question précédente, on a :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} P(N_0=0) \\ P(N_0=1) \\ \vdots \\ P(N_0=n) \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

avec les notations de **Q16**. D'après cette même question, on a donc  $Z_0 \in \text{Ker}(A_n - nI_{n+1})$ , donc  $A_n Z_0 = n Z_0$ . Ainsi si  $Z_k = Z_0$ , alors par **Q21** :

$$Z_{k+1} = \frac{1}{n} A_n Z_k = \frac{1}{n} A_n Z_0 = \frac{n}{n} Z_0 = Z_0,$$

de sorte que par récurrence immédiate,  $Z_k = Z_0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Cela montre que les  $N_k$  ont tous la même loi que  $N_0$ , à savoir la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$  vu **Q22**.

**Q24.** Si les variables les  $N_k$  suivent la même loi que  $N_0$ , i.e. si  $Z_k = Z_0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , alors en particulier  $Z_1 = Z_0$ . Or  $Z_1 = \frac{1}{n}A_n Z_0$  d'après **Q21**, donc  $A_n Z_0 = nZ_0$ .

$$\text{D'après Q16, on en déduit qu'il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que : } Z_0 = \begin{pmatrix} p_{0,0} \\ p_{0,1} \\ \vdots \\ p_{0,n} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Mais la famille  $(E_{0,j})_{0 \leq j \leq n}$  est un système complet d'évènements, donc  $\sum_{j=0}^n p_{0,j} = 1$ , c'est-à-dire :

$$\alpha \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 1. \text{ Or on sait que } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n, \text{ donc } \alpha = \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi  $Z_0$  suit la loi  $\pi$  de **Q22**, i.e. la loi  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ .

On a ainsi démontré que si toutes les variables  $N_k$  suivent la même loi, alors ce doit être la loi  $\pi$  (sachant que la question précédente démontre qu'effectivement, la loi  $\pi$  respecte cette contrainte). C'est donc bien l'unique loi à vérifier cette propriété.

## Problème 2B (extrait et adapté de Centrale PSI 2005)

**Q1.** Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$ , et a pour discriminant  $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$ .

Et  $A$  vérifie  $(P)$  ssi  $\chi_A$  n'a pas de racines réelles, i.e. ssi  $\Delta < 0$ , i.e. ssi  $(a-d)^2 + 4bc < 0$ .

**Q2.** Vu **Q1**, le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ , donc  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , et ses valeurs propres sont les racines de  $\chi_A$ , i.e. les complexes conjugués :

$$\frac{(a+d) \pm i\sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}}{2}.$$

**Q3.** • Le polynôme caractéristique de  $M(\alpha, \beta)$  est  $\chi_{M(\alpha, \beta)} = (X-\alpha)^2 + \beta^2 = (X-\alpha-i\beta)(X-\alpha+i\beta)$ . Ses racines  $\alpha \pm i\beta$  sont distinctes si  $\beta \neq 0$ , et  $M(\alpha, \beta)$  est la matrice diagonale  $\alpha I_2$  si  $\beta = 0$ . Donc dans tous les cas,  $M(\alpha, \beta)$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , de valeurs propres  $\alpha \pm i\beta$ .

• *Analyse.* Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . Si les matrices  $A$  et  $M(\alpha, \beta)$  sont semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres, donc vu **Q2** et le point précédent, et puisque  $\beta > 0$  :

$$\alpha + i\beta = \frac{(a+d) + i\sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}}{2}, \text{ i.e. } \alpha = \frac{a+d}{2} \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}}{2}.$$

Cela montre l'unicité d'une telle matrice  $M(\alpha, \beta)$  semblable à  $A$ , en cas d'existence.

*Synthèse.* Vu **Q2** et le point précédent, les matrices  $A$  et  $M(\alpha, \beta)$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  comme ci-dessus, sont semblables à la même matrice diagonale  $\text{Diag}(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta)$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , donc elles sont semblables entre elles dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  par transitivité.

Or par le résultat admis en préambule, deux matrices réelles semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  le sont aussi dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , donc  $A$  et cette matrice  $M(\alpha, \beta)$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

*Conclusion.* On a ainsi montré qu'il existe bien une et une seule matrice de type  $M(\alpha, \beta)$ , avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , qui soit semblable à  $A$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , et cette matrice est donnée par :

$$\alpha = \frac{a+d}{2} \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}}{2}.$$

**Q4.** • On suppose que  $A^2 = -I_n$ , i.e. que le polynôme  $X^2 + 1$  annule  $A$ . Les valeurs propres de  $A$  sont donc des racines de  $X^2 + 1$ , donc ne peuvent être que  $i$  ou  $-i$ , donc ne sont pas réelles. Ainsi,  $A$  vérifie  $(P)$ .

• En passant au déterminant dans la relation  $A^2 = -I_n$ , on obtient  $\det(A)^2 = (-1)^n$ , donc  $(-1)^n$  est positif, donc  $n$  est pair.

**Rq.** On peut aussi prouver ce résultat à l'aide de la propriété  $(P)$ , comme en **Q13**.

**Q5.** • La matrice  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  (et n'y est même pas trigonalisable) puisqu'elle n'a pas de valeur propre réelle, donc son polynôme caractéristique n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ .

- Mais comme  $A^2 = -I_n$ , la matrice  $A$  est annihilée par le polynôme  $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ , qui est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ , donc  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .
- On sait que  $\chi_A$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ , et par **Q4**, que ses seules racines possibles sont  $i$  et  $-i$ , donc  $\chi_A = (X - i)^p(X + i)^q$ , pour certains  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $p + q = n$ .  
Or la matrice  $A$  est à coefficients réels, donc son polynôme caractéristique  $\chi_A$  est lui aussi à coefficients réels, donc ses racines complexes conjuguées ont même multiplicité, donc  $p = q$ .  
Ainsi,  $\chi_A = (X - i)^p(X + i)^p = (X^2 + 1)^p$ , où  $p = \frac{n}{2}$  (possible car  $n$  est pair par **Q4**).

**Q6.** Comme  $A$ , donc  $f$ , n'a pas de valeur propre réelle, le vecteur  $e_1$  n'est pas un vecteur propre de  $f$ , i.e.  $f(e_1)$  n'est pas colinéaire à  $e_1$ , i.e. la famille  $(e_1, f(e_1))$  est libre.

**Q7.** Complétons la famille libre  $(e_1, f(e_1))$  en une base  $\mathcal{C} = (e_1, f(e_1), v_3, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

On a  $A^2 = -I_n$ , donc  $f^2 = -\text{Id}$ , et ainsi  $f(f(e_1)) = -e_1$ . La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}$  est donc de la forme  $A'$  indiquée dans l'énoncé. Et par formule de changement de base,  $A$  est semblable à cette matrice  $A'$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q8.** On sait (ou on retrouve par le calcul) que multiplier une matrice à gauche par  $T_{i,j}$  revient à faire l'opération élémentaire  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ , et que la multiplier à droite par  $(T_{i,j})^{-1} = I_n - \lambda E_{i,j}$  revient à faire l'opération élémentaire  $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$ .

Donc  $T_{i,j}M(T_{i,j})^{-1}$  se déduit de  $M$  en effectuant successivement les opérations  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  puis  $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$  à partir de  $M$ .

**Q9.** Posons  $A' = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

Vu **Q8**, si en partant de  $A'$ , on effectue successivement les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - a'_{1,j}L_j$  puis  $C_j \leftarrow C_j + a'_{1,j}C_2$ , pour  $j$  variant entre 3 et  $n$ , alors on transforme  $A'$  en une matrice  $A''$  semblable à  $A'$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et de la forme indiquée dans l'énoncé.

Vu **Q7**, la matrice  $A$  est alors semblable à cette matrice  $A''$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , par transitivité de la relation de similitude.

**Rq.** On peut éviter d'utiliser **Q8** en raisonnant par changement de base : passer de la matrice  $A'$  de **Q7** à une matrice de la forme  $A''$  revient à passer de la base  $\mathcal{C} = (e_1, f(e_1), v_3, \dots, v_n)$  de **Q7** à la base  $\mathcal{C}' = (e_1, f(e_1), v'_3, \dots, v'_n)$  où pour tout  $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$ ,  $v'_k = v_k + a'_{1,k}f(e_1)$ , de façon à avoir  $f(v'_k) = f(v_k) - a'_{1,k}e_1 \in \text{Vect}(f(e_1), v_3, \dots, v_n) = \text{Vect}(f(e_1), v'_3, \dots, v'_n)$ .

**Q10.** Comme  $A''$  est semblable à  $A$ , son carré  $(A'')^2$  est semblable à  $A^2 = -I_n$ , donc  $(A'')^2 = -I_n$ . Notant  $L$  la deuxième ligne de  $C'$ , on a alors, par blocs :

$$A'' = \left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & L & & \\ \hline & (0) & & & B \end{array} \right) \text{ donc } (A'')^2 = \left( \begin{array}{cc|ccc} -1 & 0 & -L & & \\ 0 & -1 & LB & & \\ \hline & (0) & & & B^2 \end{array} \right) = -I_n.$$

La dernière égalité donne  $L = (0 \dots 0)$ , donc  $C' = 0$ , et  $B^2 = -I_{n-2}$ .

**Q11.** On procède par récurrence sur  $p$  (où  $n = 2p$ ). La propriété à démontrer est :

$(H_p)$  : « toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I_{2p}$  est semblable à la matrice  $\text{Diag}(M(0, 1), \dots, M(0, 1))$  (avec  $p$  blocs diagonaux) ».

- *Cas*  $p = 1$ . Toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I_2$  est semblable à  $M(0, 1)$  au vu de **Q3** (appliqué au cas où les valeurs propres sont  $i$  et  $-i$ ), ou de **Q7** (avec des matrices  $B$  et  $C$  vides lorsque  $n = 2$ ). Donc la propriété  $(H_1)$  est vérifiée.

- *Hérédité.* Soit  $p > 1$  tel que  $(H_{p-1})$  soit vérifiée, i.e. tel que toute matrice  $B \in \mathcal{M}_{2p-2}(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = -I_{2p-2}$  est semblable à  $\text{Diag}(M(0, 1), \dots, M(0, 1))$  (avec  $p - 1$  blocs diagonaux).

Soit alors  $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I_{2p}$ .

Vu **Q9** et **Q10**,  $A$  est semblable à une matrice  $A'' = \text{diag}(M(0, 1), B)$  où  $B \in \mathcal{M}_{2p-2}(\mathbb{R})$  vérifie  $B^2 = -I_{2p-2}$ . L'hypothèse de récurrence donne alors une matrice  $Q \in \text{GL}_{2p-2}(\mathbb{R})$  telle que  $QBQ^{-1} = \text{Diag}(M(0, 1), \dots, M(0, 1))$  (avec  $p - 1$  blocs diagonaux).

Posons alors  $P = \text{diag}(I_2, Q)$ . Des calculs par blocs montrent que l'on a  $P \in \text{GL}_{2p}(\mathbb{R})$  avec  $P^{-1} = \text{diag}(I_2, Q^{-1})$ , et que  $PA''P^{-1} = \text{Diag}(M(0, 1), QBQ^{-1}) = \text{Diag}(M(0, 1), \dots, M(0, 1))$  (avec  $p$  blocs diagonaux).

Ainsi par transitivité de la relation de similitude,  $A$  est semblable à  $\text{Diag}(M(0, 1), \dots, M(0, 1))$  (avec  $p$  blocs diagonaux). Ce qui montre que  $(H_p)$  est vérifiée (si  $(H_{p-1})$  l'est).

- *Conclusion.* Par récurrence, la propriété  $(H_p)$  est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , autrement dit, toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (où  $n = 2p$ ) telle que  $A^2 = -I_n$  est semblable à la matrice  $\text{Diag}(M(0, 1), \dots, M(0, 1))$  (avec  $p$  blocs diagonaux).

**Q12.** Suivant **Q7**, on note  $P_1$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{C} = (e_1, f(e_1), e_3, e_4)$  (le calcul de  $\det(P_1)$  montre que c'est bien une base). On a alors, par formule de changement de base (inutile de calculer  $P_1^{-1}$ , il suffit de calculer les décompositions de  $f(e_3)$  et  $f(e_4)$  dans  $\mathcal{C}$ ) :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A' = P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Suivant **Q9**, on pose  $P_2 = I_4 + 5E_{2,4}$ , et  $A'' = P_2^{-1}A'P_2$ , que l'on déduit de  $A'$  par les opérations  $C_4 \leftarrow C_4 + 5C_2$  puis  $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_4$ . On obtient alors :

$$A'' = P_2^{-1}A'P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Suivant **Q11**, il reste à trouver  $Q \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  tel que  $Q^{-1}BQ = M(0, 1)$ , où  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$  est le second bloc diagonal de la matrice  $A''$  ci-dessus : en effet en posant alors  $P_3 = \text{Diag}(I_2, Q)$ , on aura  $P_3^{-1}A''P_3 = \text{Diag}(M(0, 1), M(0, 1))$ , et donc  $P^{-1}AP = \text{Diag}(M(0, 1), M(0, 1))$ , avec  $P = P_1P_2P_3$ .

En suivant à nouveau **Q7**, on voit que la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  convient.

D'où finalement :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } P = P_1P_2P_3 = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Q13.** Puisque tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle (par théorème des valeurs intermédiaires, au vu de ses limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  qui sont de signes opposés), si  $A$  vérifie  $(P)$ , alors son polynôme caractéristique est nécessairement de degré pair.

Or le polynôme caractéristique de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de degré  $n$ , donc  $n$  est pair.

**Q14.** On sait par théorème de Cayley-Hamilton (ou par calcul direct) que le polynôme caractéristique  $\chi_{M(\alpha, \beta)} = (X - \alpha)^2 + \beta^2 = (X - \alpha - i\beta)(X - \alpha + i\beta)$  annule  $M(\alpha, \beta)$ . Et les deux racines  $\alpha + i\beta$  et  $\alpha - i\beta$  de ce polynôme sont distinctes, donc simples, puisque  $\beta \neq 0$ .

**Q15.** Supposons que  $A$  vérifie (i), et notons alors, pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $P_k = (X - \alpha_k)^2 + \beta_k^2$ .

Le polynôme  $P_k$  étant le polynôme caractéristique de la matrice  $M(\alpha_k, \beta_k)$ , il l'annule par théorème de Cayley-Hamilton. De plus, ses racines sont les complexes conjugués  $\alpha_k \pm i\beta_k$ , de sorte que si  $(\alpha_k, \beta_k) \neq (\alpha_j, \beta_j)$ , alors les polynômes  $P_k$  et  $P_j$  sont sans racine commune.

Soit alors  $P$  le produit de ceux des  $P_k$  qui sont deux à deux distincts (i.e. on ne répète pas les  $P_k$  redondants dans le produit  $P$ ). Alors  $P$  est à racines simples complexes non réelles, d'après ce qui précède, et on a par produit par blocs :

$$P(\text{diag}(M(\alpha_1, \beta_1), \dots, M(\alpha_p, \beta_p))) = \text{diag}(P(M(\alpha_1, \beta_1)), \dots, P(M(\alpha_p, \beta_p))).$$

Comme  $P$  est multiple de chaque  $P_k$ , il annule chaque bloc  $M(\alpha_k, \beta_k)$ , et la matrice ci-dessus est nulle. Ainsi,  $P$  est annulateur de  $A$  (puisqu'il annule une matrice semblable à  $A$ ) et il ne possède que des racines complexes non réelles et simples. Donc  $A$  vérifie (ii).

On a ainsi montré que (i)  $\Rightarrow$  (ii).

**Q16.** C'est la traduction matricielle de la stabilité de  $E = \text{Vect}(v_1, v_2)$  par  $f$  : elle signifie que  $f(v_1)$  et  $f(v_2)$  appartiennent à  $\text{Vect}(v_1, v_2)$ , donc que leurs coordonnées selon  $v_3, v_4, \dots, v_n$  sont nulles. Donc la matrice de  $f$  dans la base  $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$  est bien de la forme indiquée.

De plus, on a alors en calculant par blocs,  $\chi_A = \chi_f = \chi_{A'} \times \chi_C$ , de sorte que puisque  $\chi_A$  n'a pas de racine réelle par l'hypothèse (P), son facteur  $\chi_{A'}$  n'en a pas non plus. Donc  $A'$  n'a pas de valeur propre réelle.

**Q17.** Vu que la matrice  $A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de **Q16** n'a pas de valeur propre réelle, on peut lui appliquer **Q3**. La matrice  $A'$  est donc semblable à une (unique) matrice  $M(\alpha, \beta)$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .

**Q18.** Vu **Q16**, la matrice  $A'$  est la matrice de l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $E$  dans la base  $(v_1, v_2)$  de  $E$ . Or  $A'$  est semblable à  $M(\alpha, \beta)$ , donc est annihilée par  $\chi_{M(\alpha, \beta)} = (X - \alpha)^2 + \beta^2$ , donc l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $E$  est annihilé par ce polynôme.

Autrement dit, l'endomorphisme  $\chi_{M(\alpha, \beta)}(f) = (f - \alpha \text{Id})^2 + \beta^2 \text{Id}$  est l'endomorphisme nul sur  $E$ , ou encore  $E \subset \text{Ker}((f - \alpha \text{Id})^2 + \beta^2 \text{Id})$ .

**Q19.** Comme  $f$  commute avec tout polynôme en  $f$ , il commute avec  $Q(f)$ , et stabilise donc  $\text{Ker}(Q(f))$  (ce sont des résultats de cours).

Il reste à montrer que  $\text{Ker}(Q(f))$  est supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Posons  $P_0 = (X - \alpha)^2 + \beta^2$  pour simplifier les notations, de sorte que  $F = \text{Ker}(P_0(f))$ .

- On commence par montrer que  $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(Q(f)) + \text{Ker}(P_0(f))$ .

Comme on a  $P_0U + QV = 1$  par le résultat admis dans la question, on a  $(P_0U)(f) + (QV)(f) = \text{Id}$  et donc :

$$(\star) : \forall x \in \mathbb{R}^n, (P_0U)(f)(x) + (QV)(f)(x) = x.$$

Or on a  $(P_0U)(f)(x) \in \text{Ker}(Q(f))$ , puisque  $QP_0U = PU$  est multiple de  $P$ , donc annule  $f$ , de sorte que  $Q(f) \circ (P_0U)(f) = (QP_0U)(f) = 0$ . De même, on a  $QV(f)(x) \in \text{Ker}(P_0(f))$ .

Vu  $(\star)$ , on a donc bien  $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(Q(f)) + \text{Ker}(P_0(f))$ .

- Montrons que  $\text{Ker}(P_0(f)) \cap \text{Ker}(Q(f)) = \{0\}$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(P_0(f)) \cap \text{Ker}(Q(f))$ . On a  $P_0(f)(x) = 0$ , donc  $(UP_0)(f)(x) = 0$ , et de même  $(VQ)(f)(x) = 0$ , donc par  $(\star)$ , et puisque le produit des polynômes est commutatif, on obtient  $x = (UP_0)(f)(x) + (VQ)(f)(x) = 0$ .

Les deux points précédents montrent que  $\text{Ker}(Q(f))$  est bien un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Q20.** • On conserve la notation  $P_0 = (X - \alpha)^2 + \beta^2$  introduite en **Q19**, de sorte que  $F = \text{Ker}(P_0(f))$ .

Comme  $f$  stabilise  $F$  (voir le début de **Q19**), on peut considérer l'endomorphisme  $\tilde{f}$  induit par  $f$  sur  $F$ . Or par définition de  $F = \text{Ker}(P_0(f))$ , on a  $P_0(\tilde{f}) = (\tilde{f} - \alpha \text{Id}_F)^2 + \beta^2 \text{Id}_F = 0$ , donc si l'on pose  $\tilde{g} = \frac{1}{\beta}(\tilde{f} - \alpha \text{Id}_F)$ , on a  $\tilde{g}^2 = \frac{1}{\beta^2}(\tilde{f} - \alpha \text{Id}_F)^2 = -\text{Id}_F$ .

On peut donc appliquer les résultats de la partie **II** à  $\tilde{g}$  (plus précisément à sa matrice dans une base de  $F$ ). On complète alors la base  $(v_1, v_2)$  de  $E$  en une base  $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_m)$  de  $F$ .

En reprenant la démarche de **Q6-Q10**, on construit une nouvelle base  $(v_1, \tilde{g}(v_1), w_3, \dots, w_m)$  de  $F$  dans laquelle les matrices de  $\tilde{g}$  est de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} M(0, 1) & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix}.$$

La matrice de  $\tilde{f} = \beta\tilde{g} + \alpha \text{Id}_F$  dans cette base est alors de la forme :

$$M = \beta N + \alpha I_m = \beta \begin{pmatrix} M(0, 1) & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix} + \alpha I_m = \begin{pmatrix} M(\alpha, \beta) & (0) \\ (0) & B' \end{pmatrix}.$$

Comme  $E = \text{Vect}(v_1, v_2)$  est stable par  $f$ , on a encore  $\tilde{g}(v_1) = \frac{1}{\beta}(f(v_1) - \alpha v_1) \in E$ , de sorte que la famille  $(v_1, \tilde{g}(v_1))$  est encore une base de  $E$ .

On déduit alors de la forme diagonale par blocs de la matrice  $M$  ci-dessus que le sous-espace  $G = \text{Vect}(w_3, \dots, w_m)$ , qui est supplémentaire de  $E$  dans  $F$ , est stable par  $\tilde{f}$ , et donc par  $f$ .

- On a donc  $F = E \oplus G$ , et avec **Q19**,  $\mathbb{R}^n = F \oplus \text{Ker}(Q(f))$ .

Ainsi  $\mathbb{R}^n = E \oplus G \oplus \text{Ker}(Q(f))$ , de sorte que le sous-espace  $G \oplus \text{Ker}(Q(f))$  est un supplémentaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Et comme les sous-espaces  $G$  et  $\text{Ker}(Q(f))$  sont stables par  $f$ , il en va de même de leur somme  $G \oplus \text{Ker}(Q(f))$ .

On a ainsi prouvé que tout sous-espace  $E$  de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^n$  admet un supplémentaire stable par  $f$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $A$  vérifie (iii).

- Q21.** Posons  $\lambda = \alpha + i\beta$ , où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . On a alors :

$$AZ = AX + iAY = \lambda Z = (\alpha + i\beta)(X + iY) = \alpha X - \beta Y + i(\alpha Y + \beta X).$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire dans cette égalité, on obtient  $AX = \alpha X - \beta Y$  et  $AY = \alpha Y - \beta X$ , donc  $AX = f(X)$  et  $AY = f(Y)$  appartiennent à  $\text{Vect}(X, Y)$ , ce qui implique par linéarité que  $\text{Vect}(X, Y)$  est stable par  $f$ .

Comme  $Z \neq 0$ , on a  $(X, Y) \neq (0, 0)$ , de sorte que  $\text{Vect}(X, Y)$  est de dimension  $\geq 1$ . Et comme  $A$  ne possède pas de valeur propre réelle (par propriété (P)),  $f$  ne possède pas de droite stable, de sorte que  $\text{Vect}(X, Y)$  n'est pas de dimension 1, donc il est de dimension 2.

- Q22.** On montre par récurrence sur  $p$  que si  $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$  vérifie (P) et (iii), alors  $A$  vérifie (i).

- *Cas  $p = 1$ .* On a le résultat par **Q3** (et la condition (iii) est alors triviale).

- *Hérédité.* Soit  $p > 1$  tel que le résultat soit vrai pour les matrices de taille  $2p - 2$ .

Considérons alors  $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$  vérifiant (P) et (iii) et notons  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2p}$  qui lui est canoniquement associé.

Par **Q21**, il existe un plan  $E$  de  $\mathbb{R}^{2p}$  stable par  $f$ . Avec (iii),  $E$  a un supplémentaire  $F$  dans  $\mathbb{R}^{2p}$  qui est stable par  $f$ , et  $f$  induit alors sur  $F$  un endomorphisme  $g$  n'ayant pas de valeur propre réelle (car  $\chi_g$  divise  $\chi_f$ ). Montrons alors que  $g$  vérifie (iii).

Soit  $E'$  un plan de  $F$  stable par  $g$ . Il est donc a fortiori stable par  $f$  et il existe donc par hypothèse (iii) un supplémentaire  $H$  de  $E'$  dans  $\mathbb{R}^{2p}$  stable par  $f$ .

On a  $E' \oplus H = \mathbb{R}^{2p}$  et on vérifie facilement que cela implique  $E' \oplus (H \cap F) = F$ .

Ainsi  $H \cap F$  est un supplémentaire de  $E'$  dans  $F$ , et il est stable par  $f$  (car  $H$  et  $F$  le sont), donc aussi par  $g$  (qui est induit par  $f$ ). Ainsi  $g$  vérifie bien (iii).

Par hypothèse de récurrence appliquée à  $g$  (plus précisément à l'une de ses matrices), on peut trouver une base de  $F$  dans laquelle la matrice de  $g$  est  $\text{Diag}(M(\alpha_2, \beta_2), \dots, M(\alpha_p, \beta_p))$ .

De même, avec l'initialisation, on peut trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par  $f$  est  $M(\alpha_1, \beta_1)$ .

La concaténée de ces bases de  $E$  et  $F$  donne alors une base de  $\mathbb{R}^{2p}$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\text{Diag}(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \dots, M(\alpha_p, \beta_p))$ . Donc  $A$  vérifie (i).

- *Conclusion.* Par récurrence, on a bien montré que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , si  $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$  vérifie (P) et (iii), alors  $A$  vérifie (i), i.e. que pour  $A$  vérifiant (P), on a (iii)  $\Rightarrow$  (i).