

**Interrogation 11**

---

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ . On pose, pour  $(f, g) \in E \times E$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) t^2 dt$ .

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.

2. Dans la suite, on admet :  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n \ln(t) dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$ .

On note  $u : t \mapsto 1$ ,  $v : t \mapsto t$  et  $F = \text{Vect}(u, v)$ . On note  $w : t \mapsto t \ln(t)$ .

Déterminer le projeté orthogonal de  $w$  sur  $F$ .

3. Déterminer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t \ln(t))^2 t^2 dt$ .