

Interrogation 12

On considère l'équation différentielle : $(x^2 + 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$ (H).

On suppose qu'il existe une fonction f développable en série entière (il existe donc $r > 0$ tel que :

$\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$) et qui est solution de (H).

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_n$.

2. En déduire l'expression des coefficients de la suite (a_n) en fonction de a_0 et a_1 (on ne demande pas de justification).

3. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \frac{a + bx}{1 + x^2}$.

4. Réciproquement, on considère la fonction g définie par $g : x \mapsto (a_0 + a_1 x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n x^{2n}$.

b) En déduire que g est développable en série entière (on précisera sur quel intervalle ce développement peut avoir lieu).