**Nom et prénom** :

PSI
Mathématiques

# Interrogation 12

On considère l'équation différentielle : $(x^2+1)\,y''+4\,xy'+2y=0 \qquad (H)$.

On suppose qu'il existe une fonction $f$ développable en série entière (il existe donc $r>0$ tel que : $\forall x \in\,]-r,r[,\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$) et qui est solution de $(H)$.

***1.*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2}=-a_n$.

*2.* En déduire l'expression des coefficients de la suite $(a_n)$ en fonction de $a_0$ et $a_1$ (on ne demande pas de justification).

*3.* Démontrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $R > 0$ tel que : $\forall x \in \,]-R, R[, \; f(x) = \dfrac{a+bx}{1+x^2}$.

*4.* Réciproquement, on considère la fonction $g$ définie par $g : x \mapsto (a_0 + a_1\, x) \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \; x^{2n}$.

***a)*** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \; (-1)^n \; x^{2n}$.

***b)*** En déduire que $g$ est développable en série entière (on précisera sur quel intervalle ce développement peut avoir lieu).