

Interrogation 13

Notons $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout coupl $(P, Q) \in E \times E$, on note $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Dans la suite, on admet : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

On note $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $F = \text{Vect}(P_0, P_1)$. On note $P_2(X) = X^2$.

Déterminer le projeté orthogonal de P_2 sur F .

3. Déterminer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt$.