Nom et prénom : PSI

Mathématiques

Interrogation 6

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $n = 2 \times \text{rg}(f)$.

a) Démontrer : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Ker}(f))$.

b) Démontrer : $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

2. On note $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit l'application φ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \mapsto & 2\,X\,P(X) + X\,(1-X)\,P'(X) \end{array}$$

On pose, pour tout $k \in [\![0,2]\!]$: $H_k(X) = X^k\,(1-X)^{2-k}$.

a) Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi)$.

c) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$.

d) L'application φ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Expliquer.

e) Démontrer que la famille $\mathscr{B}_2 = (H_0, H_1, H_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

f) Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$. On la notera P.

g) Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi)$.

h) Donner le lien entre A, P et D.