Nom et prénom :

PSI
Mathématiques

Interrogation 9

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n + n^2\, x^2}$. On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Démontrer que S est définie sur $]0, +\infty[$.

2. ***a)*** Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $]a, +\infty[$.

b) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. `JUSTIFIER` (sans calcul) que deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont même trace, même rang, même déterminant et même polynôme caractéristique.

3. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que ces deux matrices ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.

b) Déterminer : $E_2(A)$.

c) En déduire que A est diagonalisable.

d) En déduire que A et B ne sont pas semblables.