Interrogation de cours 11

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$. On note par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$$

1. Soit $\alpha < 0$. Démontrer que la série numérique $\sum (-1)^n \dfrac{e^{-\alpha\sqrt{n}}}{n}$ est divergente.

Démonstration.

- Remarquons :

$$\left| (-1)^n \frac{e^{-\alpha\sqrt{n}}}{n} \right| = |(-1)^n| \frac{\left| e^{-\alpha\sqrt{n}} \right|}{|n|} = \frac{e^{-\alpha\sqrt{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On en déduit : $(-1)^n \dfrac{e^{-\alpha\sqrt{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la série } \sum (-1)^n \frac{e^{-\alpha\sqrt{n}}}{n} \text{ est (grossièrement) divergente.}}$$

Commentaire

Pour démontrer rigoureusement ce résultat, on peut poser le changement de variable $N = \sqrt{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\alpha\sqrt{n}}}{n} = \lim_{N\to+\infty} \frac{e^{-\alpha N}}{N^2} = \lim_{N\to+\infty} \frac{(e^{-\alpha})^N}{N^2} = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{par croissances comparées et} \\ \text{car } e^{-\alpha} > 1 \text{ puisque } -\alpha > 0\end{array}\right)$$

□

2. Démontrer que la fonction S est définie sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.

- Si $x_0 < 0$, alors $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ d'après la question précécdente.

  La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n}$ est donc grossièrement divergente.

- Si $x_0 \in [0, +\infty[$:

  × la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n}$ est alternée car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n} > 0$.

  × la suite $\left(\dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n}\right)$ est décroissante.

  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n} = 0$.

  Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n}$ est convergente.

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie sur } [0, +\infty[.}$$

Commentaire

- On traite ici le cas d'une série de fonctions $\sum f_n$ telles que, pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. On peut alors présenter une version de ce critère (légèrement) adaptée à l'étude des séries de fonctions.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.

1. Énoncé du critère spécial des séries alternées

- Pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est une série alternée *(s'écrit sous la forme $\sum (-1)^n a_n(x_0)$ où $\big(a_n(x_0)\big)$ est une suite numérique de signe constant)*
- Pour tout $x_0 \in I$, $\big(|f_n(x_0)|\big)$ est décroissante,
- $\forall x_0 \in I$, $|f_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\Rightarrow$ La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I

2. De plus, si la série de fonction $\sum f_n$ est une série vérifiant les critères ci-dessus, alors :

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_{n+1}(x)$.

($R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série numérique $\sum f_n(x)$)

b) $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)|$.

- Il est à noter que pour $x_0 > 0$, on peut démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-x_0\sqrt{n}}}{n}$ est absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann par exemple). Le cas $x_0 = 0$ donne lieu à l'étude de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ dont la convergence nécessite le critère des séries alternées.
- Il est à noter que les propriétés ***2.a)*** et ***2.b)*** sont vérifiées pour $n = 0$. Ainsi, pour tout $x \in I$:

  Le réel $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_1(x)$ et $\left|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_1(x)|$

  On peut aussi démontrer :

  Le réel $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_0(x)$ et $\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_0(x)|$

- Cette dernière remarque peut être intéressante pour l'étude d'une série de fonction de la forme $\sum {f_k}'$. Pour peu que cette série vérifie les conditions d'application du critère spécial des séries alternées, on peut alors conclure que, pour tout $x \in I$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} {f_k}'(x)$ est du signe de ${f_0}'(x)$.
  Connaissant le signe de la dérivée de la fonction S, on peut alors déterminer la monotonie de S. $\square$

3. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme démontré dans la question précédente, pour tout $x \geqslant 0$, la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées). On en déduit, pour tout $x \in [0, +\infty[$:
$$\left| R_n(x) \right| = \left| S(x) - S_n(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \left| f_{n+1}(x) \right| = \frac{e^{-\sqrt{n+1}\,x}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction R_n est bornée sur $[0, +\infty[$. De plus :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant \| R_n \|_{\infty, \ [0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n+1}$$
Or :
  - $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
  - $\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

  Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \| R_n \|_{\infty, \ [0,+\infty[} = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [0, +\infty[.}$$
□

4. Démontrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^0}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.

(ii) $\boxed{\text{Convergence uniforme}}$

La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$
□

5. Citer la condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions. Signaler un cas pour lequel cette condition nécessaire est aussi suffisante.

Démonstration.

- **Une condition nécessaire de convergence uniforme**

  Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n = R_{n-1} - R_n$.
Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle $h : x \mapsto 0$. Il en est de même de la suite $(R_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$.
On en déduire alors, par stabilité par combinaison linéaire de la convergence uniforme des suites de fonctions, que la suite (f_n) converge vers la fonction $h - h = 0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{K})}$. On retiendra :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I	$\Rightarrow$	La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle

- **Cas des séries de fonctions pour lesquelles le critère spécial des séries alternées est vérifié en tout point**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.

On suppose que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est une série qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I	$\Leftrightarrow$	La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle

($\Rightarrow$) C'est le point ci-dessus (vrai pour toutes séries de fonctions).

($\Leftarrow$) Supposons que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle. Alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel toutes les fonctions de la suite (f_n) sont bornées.
Pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ |\,R_n(x)\,| &\leqslant |\,f_{n+1}(x)\,| && \textit{(car la série numérique } \textstyle\sum f_n(x) \textit{ vérifie le critère spécial des séries alternées)} \\
&\leqslant |\,f_n(x)\,| && \textit{(car la suite numérique } \big(|\,f_n(x)\,|\big)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est décroissante)} \\
&\leqslant \|f_n\|_{\infty,I}
\end{aligned}$$

Cela démontre que pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction R_n est bornée.
De plus : $\|\,R_n\,\|_{\infty,I} \leqslant \|f_n\|_{\infty,I}$.
On en déduit, par théorème d'encadrement : $\|\,R_n\,\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en conclut que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I. □