Interrogation de cours 12

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle & : & \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0) \times Q^{(k)}(0)}{\left(k!\right)^2} \end{array}$$

1. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ (*on notera dans la suite* $\| \cdot \|$ *la norme associée à ce produit scalaire*).

2. **Parenthèse**

Soit E un espace préhilbertien `RÉEL`.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est de dimension finie notée $m \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de F.

Quelle formule (portant sur les vecteurs de E) permet d'affirmer : $E = F \oplus F^{\perp}$?
(on ne demande pas de justification)

3. Si $R \in \mathbb{R}_2[X]$ est un polynôme de E, que vaut : $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum\limits_{k=0}^{2} \dfrac{\big((R(X) - aX - b)^{(k)}(0)\big)^2}{\big(k!\big)^2}$?
(on n'attend pas de justification, seulement une définition / formule)

4. On note $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $R(X) = X^2 - 2X$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F.
Quelle propriété possède le polynôme $R - p_F(R)$? *(on n'attend pas de justification)*

5. Déterminer $p_F(R)$.

6. En déduire $\mathrm{d}(R, F)$.