Interrogation de cours 14

Pour tout $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on pose $\binom{\alpha}{n} = 1$ si $n = 0$, et $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n \geqslant 1$.

On considère un nombre réel α, qui n'est pas un entier naturel, et on note f_α la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$\forall x > -1,\ f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

1. Vérifier que la fonction f_α est solution sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(1+x)\,y' - \alpha y = 0 \tag{1}$$

2. On se propose de chercher les solutions de l'équation différentielle (1) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Pour cela, on considère une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme, notée $\psi : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, est solution de (1) sur l'intervalle $]-r, r[$, avec $r = \min(R, 1)$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\, a_{n+1} = (\alpha - n)\, a_n$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \binom{\alpha}{n} a_0$.

c) Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0 = 1$, puis vérifier que sa somme est bien solution de (1) sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

3. Montrer soigneusement que pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.