

Interrogation de cours 1

1. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$. On utilisera la règle de d'Alembert.

Démonstration.

On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n!}{n^n}$.

• Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \\ &= \frac{u_{n+1}}{u_n} && (\text{car : } \forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq 0) \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{\cancel{(n+1)} \times \cancel{n}}{\cancel{(n+1)} \times (n+1)^n} \times \frac{n^n}{\cancel{n}} \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \\ &= \exp \left((-n) \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

• Or :

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} && (\text{car } \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0) \\ \text{donc } (-n) \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-n) \times \frac{1}{n} = -1 \end{aligned}$$

On obtient finalement, par composition de limites :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \exp \left((-n) \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-1) = \frac{1}{e} \in [0, 1[$$

Ainsi, par règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente.

□

2. Déterminer la nature de la série $\sum \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)$. On écrira un développement asymptotique.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\text{donc } -\cos(x) = -1 + \frac{1}{2} x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\text{donc } 1 - \cos(x) = \frac{1}{2} x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

En particulier : $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} x^2$.

- Comme $\frac{\pi}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, on en déduit :

$$\left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{n^2}$$

Finalement :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$

× $\left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

× La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)$ est (absolument) convergente.

□

3. Déterminer la nature de la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$ à l'aide d'un théorème de comparaison.

Démonstration.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$

× $\left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$

× La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$ est (absolument) convergente.

□

4. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(1 + 2 \cos(n \frac{\pi}{3}))}{5n^2}$ à l'aide d'un théorème de comparaison.

Démonstration.

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$\times \frac{\sin(1 + 2 \cos(n \frac{\pi}{3}))}{5n^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

\times La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série

$$\sum \frac{\sin(1 + 2 \cos(n \frac{\pi}{3}))}{5n^2} \text{ est (absolument) convergente.}$$

□

5. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sqrt{n}}{n!}$ à l'aide d'un théorème de comparaison.

Démonstration.

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$\times \frac{\sqrt{n}}{n!} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

\times La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la

$$\text{série } \sum \frac{\sqrt{n}}{n!} \text{ est convergente.}$$

□