

Interrogation de cours 3

1. a) La famille $(0_{\mathbb{R}[X]}, 1, 2 + X, 1 - X^2)$ est-elle libre ? Justifier.

Démonstration.

La famille $(0_{\mathbb{R}[X]}, 1, 2 + X, 1 - X^2)$ n'est pas libre car elle contient $0_{\mathbb{R}[X]}$.

□

b) Démontrer que la famille $(X - X^2, X^3 - X^5, X)$ est libre. On exige ici l'utilisation de la méthode correspondant à la vérification de la définition de liberté.

Démonstration.

Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

On suppose : $\lambda \cdot (X - X^2) + \mu \cdot (X^3 - X^5) + \nu \cdot X = 0_{\mathbb{R}[X]}$ (*).

$$\text{Or : } (*) \iff (\lambda + \nu) \cdot X - \lambda \cdot X^2 + \mu \cdot X^3 - \mu \cdot X^5 = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda & + & \nu & = & 0 \\ -\lambda & & & = & 0 \\ & \mu & & = & 0 \\ & -\mu & & = & 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (car (1, X, X^2, X^3, X^4, X^5) \\ est une famille libre de \mathbb{R}[X]) \end{array}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda & + & \nu & = & 0 \\ & & \nu & = & 0 \\ & \mu & & = & 0 \\ & -\mu & & = & 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} \lambda & + & \nu & = & 0 \\ & \mu & & = & 0 \\ & & \nu & = & 0 \\ & -\mu & & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \mu = \nu = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (par remontées successives) \end{array}$$

La famille $(X - X^2, X^3 - X^5, X)$ est donc libre.

□

c) De quelle propriété la question précédente est-elle une illustration ? (à citer avec précision !)

Démonstration.

Toute famille de polynômes échelonnée en degrés et qui ne contient pas le polynôme nul est libre.

□

2. Démontrer que la famille $(1 + X + X^2, 1 - X + X^2, 3X - 2X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $(1 + X + X^2, 1 - X + X^2, 3X - 2X^2)$ est libre.

Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

On suppose : $\lambda \cdot (1 + X + X^2) + \mu \cdot (1 - X + X^2) + \nu \cdot (3X - 2X^2) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ (*).

$$\text{Or : } (*) \iff (\lambda + \mu) \cdot 1 + (\lambda - \mu + 3\nu) \cdot X + (\lambda + \mu - 2\nu) \cdot X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu + 3\nu = 0 \\ \lambda + \mu - 2\nu = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(car } (1, X, X^2) \text{ est une} \\ \text{famille libre de } \mathbb{R}[X]) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -2\mu + 3\nu = 0 \\ -2\nu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \{\lambda = \mu = \nu = 0\}$$

(par remontées successives)

La famille $\mathcal{F} = (1 + X + X^2, 1 - X + X^2, 3X - 2X^2)$ est libre.

- La famille $\mathcal{F}$ est :

× libre,

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

On en conclut que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Commentaire

On aurait aussi pu démontrer que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour ce faire, le plus simple est d'utiliser les manipulations algébriques autorisées sur les espaces vectoriels engendrés par une partie. Attention à ne pas confondre espace vectoriel engendré par une partie et famille : l'espace vectoriel engendré reste inchangé par certaines manipulations algébriques mais la partie est évidemment modifiée par ces manipulations (c'est tout le but de la méthode !). Ici, on pouvait écrire :

$$\begin{aligned} & \text{Vect}(1 + X + X^2, 1 - X + X^2, 3X - 2X^2) \\ &= \text{Vect}(1 + X + X^2, (1 - X + X^2) - (1 + X + X^2), 3X - 2X^2) \\ &= \text{Vect}(1 + X + X^2, -2X, 3X - 2X^2) \\ &= \text{Vect}(1 + X + X^2, X, 3X - 2X^2) \\ &= \text{Vect}(1 + X + X^2, X, (3X - 2X^2) - 3X) \\ &= \text{Vect}(1 + X + X^2, X, -2X^2) \\ &= \text{Vect}(1 + X + X^2, X, X^2) \\ &= \text{Vect}((1 + X + X^2) - X - X^2, X, X^2) \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2) \\ &= \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

□

3. On note : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

Déterminer une base de F et sa dimension (on justifiera).

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
 X \in F &\iff (A - 2I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} &\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \\
 L_3 \leftarrow L_3 + L_2 &\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x + y = z \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{en choisissant } z \text{ comme variable auxiliaire}) \\
 L_1 \leftarrow L_1 - L_2 &\iff \begin{cases} -x = z \\ y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned}
 F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre F ,

× est libre car est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

C'est donc une base de F .

On en conclut enfin : $\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 1$.

□