Interrogation de cours 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
On se donne une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère f l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \ = \ ({}^tA)\, M + M\, A$$

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

3. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On considère dans la suite le cas $n = 3$. On considère les trois matrices :
$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Enfin on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On admet que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$. On la note T.
(faire les calculs au brouillon et écrire uniquement les résultats permettant d'écrire T)

5. Déterminer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f.

6. Que peut-on déduire du calcul du déterminant ?