Interrogation de cours 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+t^2\right)}{1+t^2} \, dt$.

1. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.
Dans la suite, on note :

× $h : (x,t) \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+t^2\right)}{1+t^2}$.

× pour tout $x \in\,]0,+\infty[$, $\underline{h}_x : t \mapsto h(x,t)$.

× pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+t^2\right)}{1+t^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in\,]0,+\infty[$:

$$\underline{h}_t'(x) \;=\; \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{x^2+t^2} \times 2x \;=\; \frac{2x}{\left(1+t^2\right)\left(x^2+t^2\right)}$$

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

(0) Pour tout $x \in\,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+t^2\right)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En effet :

× la fonction $t \mapsto \underline{h}_x(t)$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle, dont le dénominateur de n'annule pas.

× l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{h}_x(t)\, dt$ est absolument convergente.

- ▶ $\forall t \geqslant 1,\ \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$
- ▶ $\dfrac{\ln\left(x^2+t^2\right)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$
- ▶ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $\dfrac{3}{2}$ (> 1).

Ainsi, par théorème des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{h}_x(t)\, dt$ est absolument convergente.

- Intégrabilité par domination

  (1) ▸ Pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(1)}(x) = \dfrac{2x}{(1+t^2)\,(x^2+t^2)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

  ▸ Soit $(a,b) \in \,]0,+\infty[^2$ et soit $x \in [a,b]$.
  Soit $t \in [0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} \left|\underline{h}_t^{(1)}(x)\right| & = & \left|\dfrac{2x}{(1+t^2)\,(x^2+t^2)}\right| & \\[2ex] & = & \dfrac{|\,2x\,|}{|\,(1+t^2)\,(x^2+t^2)\,|} & \\[2ex] & = & \dfrac{2x}{(1+t^2)\,(x^2+t^2)} & \\[2ex] & \leqslant & \dfrac{2b}{(1+t^2)\,(x^2+t^2)} & \textit{(puisque } x \leqslant b\textit{)} \\[2ex] & \leqslant & \dfrac{2b}{(1+t^2)\,t^2} & \textit{(car } x^2 \geqslant 0 \textit{ donc } x^2+t^2 \geqslant t^2 \textit{ et } \dfrac{1}{x^2+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \textit{ puisque la fonction inverse est décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

  Et la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{2b}{(1+t^2)\,t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En effet :

  × elle est continue sur $[0,+\infty[$.

  × $\dfrac{2b}{(1+t^2)\,t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^4}\right)$ ce qui permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{2b}{(1+t^2)\,t^2}\,dt$ est absolument convergente par théorème de domination.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

De plus :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \underline{h}_t'(x)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+t^2)\,(x^2+t^2)}\,dt$$

□

2. ***a)*** Démontrer : $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2+t^2} - \dfrac{1}{1+t^2}\right)\,dt.$

Démonstration.

- Remarquons que pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x > 0$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2x}{1-x^2}\left(\dfrac{1}{x^2+t^2} - \dfrac{1}{1+t^2}\right) & = & \dfrac{2x}{1-x^2}\,\dfrac{(1+t^2)-(x^2+t^2)}{(1+t^2)\,(x^2+t^2)} \\[2ex] & = & \dfrac{2x}{1-x^2}\,\dfrac{1-x^2}{(1+t^2)\,(x^2+t^2)} \\[2ex] & = & \dfrac{2x}{\cancel{1-x^2}}\,\dfrac{\cancel{1-x^2}}{(1+t^2)\,(x^2+t^2)} \\[2ex] & = & \underline{h}_t'(x) \end{array}$$

- On en conclut, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} \underline{h}_t'(x) \ dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{2x}{1-x^2} \ \left(\frac{1}{x^2+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) \right) \ dt \\ &= \frac{2x}{1-x^2} \ \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) \ dt \end{aligned}$$

□

b) En déduire une expression simple pour f.

Démonstration.

- Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1-x^2} \ \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) \ dt \\ &= \frac{2x}{1-x^2} \ \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2} \ dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \ dt \right) \\ &= \frac{2x}{1-x^2} \ \left(\left[\frac{1}{x} \ \arctan\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^{+\infty} - [\ \arctan(t) \ ]_0^{+\infty} \right) \\ &= \frac{2x}{1-x^2} \ \left(\left(\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{x} \ \arctan\left(\frac{t}{x}\right) - \cancel{\arctan(0)} \right) - \left(\lim_{t\to+\infty} \ \arctan(t) - \cancel{\arctan(0)} \right) \right) \\ &= \frac{2x}{1-x^2} \ \left(\frac{1}{x} \ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\,\cancel{x}}{1-x^2} \ \frac{1-x}{\cancel{x}} \\ &= \pi \ \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} \\ &= \pi \ \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

- On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \pi \ \ln(1+x) \ + \ c$$

□