Interrogation de cours 8

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X) \\
&= \det\Big(X\, I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 2 & 0 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & X \\ 1 & X-2 & 1 \\ X-3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 - (X-3)\,L_1}}{=} (-1) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & X \\ 0 & 2\,(X-2) & 2-X \\ 0 & 0 & -2-X\,(X-3) \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times \frac{1}{2} \times \cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{2} \begin{vmatrix} 2\,(X-2) & -(X-2) \\ 0 & -(X^2-3X+2) \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= (-1) \times \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}\,(X-2) \begin{vmatrix} 1 & -(X-2) \\ 0 & -(X-1)(X-2) \end{vmatrix} \\
&= \cancel{(-1)}\,(X-2) \times \cancel{(-1)}\,(X-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (X-1) \end{vmatrix} \\
&= (X-2)^2 \Big(\big(1 \times (X-1)\big) \;-\; \big(0 \times 1\big)\Big) \\
&= (X-2)^2\,(X-1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \chi_f(X) = (X-2)^2\,(X-1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } X_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{1, 2\}.}$$

Commentaire

On a appliqué ici la méthode usuelle sans faire preuve de recul. Il aurait été plus pertinent de développer directement selon la $2^{\text{ème}}$ colonne qui contenait déjà deux 0.

$\square$

2. Déterminer une base de $E_2(f)$.

Démonstration.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
  Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} u \in E_2(f) & \iff & (f - 2\ \mathrm{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \iff & (A - 2\ I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & z & = & 0 \\ -x & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \ x = -z \right. \end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(f) & = & \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ (f - 2\ \mathrm{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} \\ & = & \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x = -z \right\} \\ & = & \left\{ (-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \left\{ y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((0, 1, 0), (-1, 0, 1) \right) \end{array}$$

- Notons $u_1 = (0, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2) est :
  × génératrice de $E_2(f)$.
  × libre car constituée uniquement de **deux** vecteurs non colinéaires.
  C'est donc une base de $E_2(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u_1, u_2) \text{ est une base de } E_2(f).}$$

□

3. Déterminer $u = f\big(\,(1,-1,-2)\,\big)$. En déduire $E_1(f)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(f\big(\,(1,-1,-2)\,\big)\Big) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(\,(1,-1,-2)\,\Big) \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(1 \cdot (1,-1,-2)\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} \text{ étant bijective, on en conclut : } f\big(\,(1,-1,-2)\,\big) = 1 \cdot (1,-1,-2).}$$

- Ainsi : $u \in E_1(f)$. On en déduit :

$$\mathrm{Vect}\,(\,(1,-1,-2)\,) \ \subset\ E_1(f)$$

Par ailleurs, par théorème du rang :

$$\begin{aligned}
\dim\Big(\mathbb{R}^3\Big) &= \dim\Big(\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)\Big) \ +\ \dim\Big(\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_E)\Big) \\
&= \mathrm{rg}\Big(\,f - \mathrm{id}_E\,\Big) \ +\ \dim\Big(E_1(f)\Big)
\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\dim\Big(E_1(f)\Big) &= \dim\Big(\mathbb{R}^3\Big) \ -\ \mathrm{rg}\Big(\,f - \mathrm{id}_E\,\Big) \\
&= 3 \ -\ \mathrm{rg}\Big(A - I_3\Big) \\
&= 3 - 2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

- Finalement :
  - × $\mathrm{Vect}\,(\,(1,-1,-2)\,) \ \subset\ E_1(f)$.
  - × $\dim\big(\mathrm{Vect}\,(\,(1,-1,-2)\,)\,\big) \ =\ 1 \ =\ \dim\big(E_1(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_1(f) \ =\ \mathrm{Vect}\,(\,(1,-1,-2)\,).}$$

□

4. On note $\mathscr{B}'$ la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $E_2(f)$ et celle de $E_1(f)$. Démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\mathscr{B}' = \big((0,1,0),(-1,0,1),(1,-1,-2)\big)$ est libre.

  Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot (0,1,0) + \lambda_2 \cdot (-1,0,1) + \lambda_3 \cdot (1,-1,-2) = (0,0,0) \quad (*)$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathscr{B}'$ est :
  - × libre,
  - × telle que $\operatorname{Card}\big((u_1,u_2,u_3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

5. Déterminer $D = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Démonstration.

- On a démontré : $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u$.

  On en déduit : $\operatorname{Mat}_{(u_1,u_2,u)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On a démontré : $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u$.

  On en déduit : $\operatorname{Mat}_{(u_1,u_2,u)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On a démontré : $u \in E_1(f)$. Ainsi : $f(u) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u$.

  On en déduit : $\operatorname{Mat}_{(u_1,u_2,u)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } D = \operatorname{Mat}_{(u_1,u_2,u)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□