

Interrogation de cours 10

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto \frac{n+1}{n+2} e^{-nx^2}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

Démonstration.

- Soit $x_0 \in [0, +\infty[$. Deux cas se présentent.

× Si $x_0 = 0$:

$$f_n(0) = \frac{n+1}{n+2} e^0 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} \times 1 = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

× Si $x_0 \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_n(x_0) &= \frac{n+1}{n+2} e^{-nx_0^2} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} \times e^{-nx_0^2} \\ &= e^{-x_0^2 n} \\ &= \frac{1}{(e^{x_0^2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

En effet, comme $x_0 > 0$ alors $x_0^2 > 0$ et $e^{x_0^2} > e^0 = 1$ ce qui permet de conclure :

$$(e^{x_0^2})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur

$$[0, +\infty[\text{ vers } f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

□

2. Soit $a > 0$. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, +\infty[, \quad |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{n+1}{n+2} \times e^{-nx^2} \right| \quad (\text{car } f(x) = 0 \text{ puisque } x \neq 0) \\ &= \frac{n+1}{n+2} \times e^{-nx^2} \quad (\text{car toutes les quantités en présence sont positives}) \\ &\leq \frac{n+1}{n+2} \times e^{-na^2} \end{aligned}$$

En effet, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\begin{array}{lll}
 & x & \geq a \\
 \text{donc} & x^2 & \geq a^2 \quad (\text{car la fonction élévation au carré est croissante sur } [0, +\infty[) \\
 \text{donc} & -n x^2 & \leq -n a^2 \quad (\text{car } -n \leq 0) \\
 \text{donc} & e^{-n x^2} & \leq e^{-n a^2} \quad (\text{par croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R}) \\
 \text{donc} & \frac{n+1}{n+2} e^{-n x^2} & \leq \frac{n+1}{n+2} e^{-n a^2} \\
 \text{donc} & \frac{n+1}{n+2} e^{-n x^2} & \leq e^{-n a^2} \quad (\text{car } \frac{n+1}{n+2} \leq 1 \text{ puisque } 0 \leq n+1 \leq n+2)
 \end{array}$$

- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur $[a, +\infty[$.

$$\text{De plus : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq e^{-n a^2}$$

- Or :

$$\begin{array}{l}
 \times \quad 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\
 \times \quad e^{-n a^2} = e^{-a^2 n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0
 \end{array}$$

On en déduit, par théorème d'encadrement : $\|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$ (où $a > 0$) vers f .

Commentaire

- Cet exercice illustre la manière classique de procéder pour démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonction. Plus précisément, on procède comme suit.

1) Convergence simple

Il s'agit de trouver la limite simple f de la suite (f_n) (cf question précédente).

2) Convergence uniforme

(i) On commence par fixer un entier n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) On cherche δ_n tel que :

$$\begin{array}{l}
 \times \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \delta_n \\
 \times \quad \delta_n \text{ ne fait pas apparaître } x, \\
 \times \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0.
 \end{array}$$

Insistons sur le fait que la quantité δ_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in I\}$. Cela permet alors de conclure :

$$\|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \delta_n$$

Il est d'ailleurs préférable d'utiliser les méthodes de majoration usuelles pour déterminer δ_n et réserver une éventuelle étude la fonction $f_n - f$ (permettant de déterminer la valeur exacte de $\|f_n - f\|_{\infty, I}$) au cas où ces techniques ne sont pas assez fines pour aboutir.

Commentaire

- Notons enfin que la majoration : $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$ répond à la contrainte d'obtenir une quantité δ_n qui ne fait pas apparaître x . Cependant, cette majoration est trop brutale et la quantité obtenue n'admet pas de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Il convient donc, lors de l'étape de majoration, de bien veiller à conserver la partie qui va permettre d'obtenir cette limite nulle. □

3. On souhaite maintenant démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

- a) En considérant une suite (x_n) (de limite nulle) convenablement choisie, répondre à la question. On veillera à rédiger le plus rigoureusement possible.

Démonstration.

- Notons (x_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x_n)| &= \frac{n+1}{n+2} e^{-n \left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2} \\ &= \frac{n+1}{n+2} e^{-1} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi : $|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$.

- On procède par l'absurde.
Supposons que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f .
Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in [0, +\infty[$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0, +\infty[}$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = e^{-1} \leq 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, [0, +\infty[}$$

Absurde !

Ainsi, la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f .

Commentaire

- Comment trouver la suite (x_n) utilisée dans la démonstration ? Pour cela, il faut se convaincre que c'est le point $0 \in I$ qui pose problème. C'est d'ailleurs pour cela que l'on traite, en question 2. de la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. L'idée est alors de trouver une suite $(x_n) \in [0, +\infty[^\mathbb{N}$ qui converge vers 0 (point qui pose problème). Il est à noter que si c'est $+\infty$ qui posait problème, on considère généralement la suite (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n$$

Évidemment, il n'existe pas de suite (x_n) qui fonctionne à tous les coups. Il faut donc faire preuve de qualité d'adaptation et considérer une suite (x_n) pertinente pour l'exercice proposé.

- On aurait aussi pu considérer dans cette question la suite (x_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1}{n}$. □

b) Répondre de nouveau à la question en exploitant une propriété de la fonction f .

Démonstration.

On procède par l'absurde.

On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f .

(i) Caractère $\mathcal{C}^0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

(ii) Convergence uniforme

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ (par hypothèse).

Ainsi, la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. Absurde ! (car f n'est pas continue en 0)

Ainsi la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f .

□