

Interrogation de cours 11

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2} n x\right)$.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose $0 < a < b$.

- a) Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

3. Démontrer que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

4. Soit I un intervalle réel non vide et non réduit à un point. Soit $(g_n) \in \mathbb{K}^I$ et soit $g \in \mathbb{K}^I$.
On suppose que la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur I .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k$.

Démontrer :

La série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur I	$\Rightarrow$	La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle
---	---------------	--

(On pourra commencer par exprimer g_n en fonction de R_n)

5. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ (on pourra se servir de la question précédente).