

Interrogation de cours 11

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right)$.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$.

La série $\sum 0$ est convergente.

- Si $x_0 \in]0, +\infty[$ alors :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}, (e^{-x_0})^n \geq 0$$

$$\times \left| e^{-nx_0} \sin\left(\frac{\pi}{2} nx_0\right) \right| = |e^{-nx_0}| \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} nx_0\right) \right| = e^{-nx_0} \times \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} nx_0\right) \right| \leq (e^{-x_0})^n$$

$\times$ La série $\sum (e^{-x_0})^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $e^{-x_0} \in]-1, 1[$.

On en déduit que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est (absolument) convergente.

Finalement, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Commentaire

- Il est important de bien comprendre les objets et en particulier de différencier les séries $\sum f_n$ et $\sum f_n(x_0)$ qui représentent des objets différents.

$$\sum f_n$$

C'est une **série de fonctions**.
Autrement dit, c'est la **suite de fonctions** (S_n) de terme général

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

$$\sum f_n(x_0)$$

C'est une **série numérique**.
Autrement dit, c'est la **suite numérique** $(S_n(x_0))$

de terme général $S_n(x_0) = \sum_{k=0}^n f_k(x_0)$.

La notation x_0 a un intérêt pédagogique (utilisée dans le corrigé mais pas dans l'énoncé qui préfère la notation x). Elle a pour but d'insister sur le fait que cet élément est fixé ce qui permet de mettre en avant que $\sum f_n(x_0)$ est une série numérique et pas une série de fonctions.

- Étudier la convergence simple d'une série de fonctions sur un intervalle I , c'est étudier la nature de la série numérique $\sum f_n(x_0)$ pour tout x_0 élément de I . Il est donc logique qu'une telle étude donne lieu à l'utilisation des méthodes listées dans le chapitre sur les séries numériques (notamment les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs).
- Il ne faut pas confondre non plus S qui est une fonction et $S(x)$ qui est une quantité (dépendante de x). Il convient de bien lire l'énoncé sur ce point : comme précisé plus haut, la série $\sum f_n(x)$ est une série numérique. Sa somme, lorsqu'elle est bien définie, est une quantité dépendant de x , généralement notée $S(x)$.

□

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose $0 < a < b$.

a) Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Démonstration.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right) \right| \\ &= e^{-nx} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right) \right| \\ &\leq e^{-nx} \quad \left(\text{car } \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right) \right| \leq 1 \right) \\ &\leq e^{-na} \quad (*) \end{aligned}$$

En effet, pour tout $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ \text{donc } -na &\geq -nx \geq -nb \quad (\text{car } -n \leq 0) \\ \text{donc } e^{-na} &\geq e^{-nx} \geq e^{-nb} \end{aligned}$$

On conclut par (*) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur $[a, b]$. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq e^{-na}$$

La série numérique $\sum (e^{-a})^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $e^{-a} \in]-1, 1[$.

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, [a, b]}$ est convergente.
Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Commentaire

On constate que la majoration démontrée dans cette question ne dépend pas de b . Avec le même raisonnement, on peut conclure que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. □

3. Démontrer que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

(i) Caractère $\mathcal{C}^0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Convergence uniforme sur tout segment (par convergence normale)

Pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$ la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Par théorème de régularité, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur TOUT SEGMENT $[a, b]$ de $]0, +\infty[$. Elle est donc continue sur $]0, +\infty[$. □

4. Soit I un intervalle réel non vide et non réduit à un point. Soit $(g_n) \in \mathbb{K}^I$ et soit $g \in \mathbb{K}^I$.

On suppose que la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur I .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k$.

Démontrer : $\left. \begin{array}{l} \text{La série de fonctions } \sum g_n \\ \text{converge uniformément sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{La suite de fonctions } (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I \text{ vers la fonction nulle} \end{array} \right\}$

Démonstration.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) - R_n(x) &= \sum_{k=n}^{+\infty} g_k(x) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \\ &= \left(g_n(x) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = R_{n-1} - R_n$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned} |g_n(x)| &= |R_{n-1}(x) - R_n(x)| \\ &\leq |R_{n-1}(x)| + |R_n(x)| \\ &\leq \|R_{n-1}\|_{\infty, I} + \|R_n\|_{\infty, I} \end{aligned}$$

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est bornée sur I . De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|g_n\|_{\infty, I} \leq \|R_{n-1}\|_{\infty, I} + \|R_n\|_{\infty, I}$$

Or :

$$\times 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\times \|R_{n-1}\|_{\infty, I} + \|R_n\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ puisque la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\|g_n\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en conclut que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Commentaire

• Il est aisé de démontrer :

$\left. \begin{array}{l} \text{La série de fonctions } \sum g_n \\ \text{converge normalement sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{La suite de fonctions } (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I \text{ vers la fonction nulle} \end{array} \right\}$

Pour le comprendre, il suffit de revenir à la définition de ces deux modes de convergence. En notant $0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})}$ la fonction nulle, l'encadré se réécrit :

La série numérique $\sum \|g_n\|_{\infty, I}$ est convergente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - 0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})}\|_{\infty, I} = 0$

Cet encadré est évidemment vérifié car il s'agit simplement d'une instance de la condition nécessaire de convergence d'une série numérique. $\square$

5. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ (on pourra se servir de la question précédente).

Démonstration.

On procède par l'absurde.

On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I . D'après la question précédente, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{n}\right) &= e^{-n \frac{1}{n}} \sin\left(\frac{\pi}{2} n \frac{1}{n}\right) \\ &= e^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

- Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, +\infty[$, alors :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq \|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[}$$

On en conclut, par passage à la limite :

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) & \leq & \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[} \\ \parallel & & \parallel \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1} & & 0 \end{array}$$

Autrement dit : $e^{-1} \leq 0$. Absurde !

Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I .

Commentaire

- Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in]0, +\infty[$.

On peut alors conclure, par la même démonstration, que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

- Rappelons par ailleurs :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I $\Rightarrow$ La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

Comme la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$ (respectivement sur $[0, +\infty[$) alors, la contraposée du résultat encadré permet de conclure que la la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$ (respectivement sur $[0, +\infty[$). $\square$

6. (BONUS) Déterminer la limite de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en $+\infty$.

Démonstration.

(i) Existence d'une limite finie

Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

× Si $n = 0$

$$f_0(x) = e^{-0 \times x} \sin(0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

× Si $n \geq 1$

$$0 \leq |f_n(x)| = \left| e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right) \right| = e^{-nx} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right) \right| \leq e^{-nx}$$

Or :

$$\times 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\times e^{-nx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

(ii) Convergence uniforme (par convergence normale)

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

Par théorème de la double limite, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en $+\infty$.

Plus précisément, la série numérique $\sum \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$ est convergente et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

Commentaire

- Le calcul de la limite est déterminé par la formule :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

Pour que cette formule ait du sens, il est nécessaire de connaître la limite $\ell_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$. Cette limite ne dépend évidemment pas de x mais peut dépendre de n .

- Rappelons que le théorème de la double limite permet de conclure que la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente. Ce point peut parfois permettre de démontrer, par l'absurde, que la série de fonctions ne converge pas normalement (on suppose la convergence normale ce qui démontre que la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente, ce qui n'est pas le cas).
- On a démontré que la série de fonctions $\sum f_n$ ne convergeait pas normalement sur $]0, +\infty[$. Ce point n'est pas nécessaire pour utiliser le théorème de la double limite. Il suffit en effet de travailler sur n'importe quel intervalle dont la borne supérieure est $+\infty$. On choisit ici $[1, +\infty[$ mais tout autre intervalle $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$) convient.

Commentaire

- On est parfois confronté à la situation suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \ell_n \quad (\text{limite finie})$$

Il n'est pas possible d'utiliser directement le théorème de la double limite pour déterminer la limite de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (puisque la propriété « pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en $+\infty$ » n'est pas vérifiée). En revanche, si l'hypothèse de convergence normale est bien vérifiée, on peut conclure, par théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=\boxed{1}}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=\boxed{1}}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=\boxed{1}}^{+\infty} \ell_n \quad \left(\begin{array}{l} \text{cette valeur est finie} \\ \text{puisque le théorème de la} \\ \text{double limite stipule que la} \\ \text{série } \sum_{n \geq 1} \ell_n \text{ est convergente} \end{array} \right)$$

Cela permet alors de conclure :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

(somme d'une limite infinie et d'une limite finie)

□