

Interrogation de cours 12

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1, +\infty[$.

2. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $] -1, +\infty[$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+n^2 x^2}$.

On note : $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$. On admet que la fonction S est définie sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on note $\varphi_x : t \mapsto \frac{1}{t+t^2 x^2}$. Dans la suite, on pourra se servir du fait que, pour tout $x > 0$, la fonction φ_x est décroissante sur $[1, +\infty[$.

a) Démontrer : $\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \varphi_x(k) \geq \int_k^{k+1} \varphi_x(t) dt \geq \varphi_x(k+1)$.

b) Pour tout $z \geq 1$, démontrer : $\forall x > 0, \int_1^z \varphi_z(t) dt = \ln(1+x^2) - \ln\left(x^2 + \frac{1}{z}\right)$.

(on pourra se servir de l'égalité : $\varphi_x(t) = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+x^2t}$)

c) Démontrer enfin : $\forall x > 0, \ln(1+x^2) - \ln(x^2) \leq S(x) \leq \ln(1+x^2) - \ln(x^2) + \frac{1}{1+x^2}$.