

Interrogation de cours 13

- Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
- On dispose de deux urnes :
 - × l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n ,
 - × l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .
- On pioche tout d'abord une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la boule tirée.
- Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable qui prend pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.
- 1. Dans cette question (et dans cette question seulement) on considère que l'urne U ne contient qu'une boule (cas où $n = 1$). Reconnaître la loi de Y .

2. On revient au cas général (l'urne U contient n boules).
Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Justifier :
- × si $k \leq i$, $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = 0$.
 - × si $0 \leq i \leq k$, $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = \binom{k}{i} p^i (1 - p)^{k-i}$.

4. Dans les deux questions à venir, on écrira **soigneusement** la formule des probabilités totales (à l'aide du même système complet d'événements correctement choisi).

a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égale à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

b) Écrire, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}(\{Y = i\})$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.