

Interrogation de cours 13

- Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
 - On dispose de deux urnes :
 - × l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n ,
 - × l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .
 - On pioche tout d'abord une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la boule tirée.
 - Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable qui prend pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.
1. Dans cette question (et dans cette question seulement) on considère que l'urne U ne contient qu'une boule (cas où $n = 1$). Reconnaître la loi de Y .

Démonstration.

- Dans le cas où l'urne U ne contient qu'une boule (numérotée 1), c'est forcément cette boule qui est piochée dans l'urne.
- L'expérience (tirage d'une boule dans V) possède alors 2 issues.
L'une est nommée succès et se produit avec la probabilité p (probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne V) ; l'autre se nomme échec et se produit avec probabilité $1 - p$.
La variable aléatoire Y prend pour valeur :
 - × 1 en cas de succès lors de l'expérience,
 - × 0 en cas d'échec lors de l'expérience.

On en conclut : $Y \sim \mathcal{B}(p)$.

□

2. On revient au cas général (l'urne U contient n boules).
Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- L'expérience possède n issues **équiprobables** numérotées de 1 à n .
- La variable aléatoire X prend pour valeur le numéro de l'issue de l'expérience.

On en conclut : $X \sim \mathcal{U}([1, n])$.

□

3. Soit k un élément de $[1, n]$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Justifier :

- × si $k < i$, $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = 0$.
- × si $0 \leq i \leq k$, $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = \binom{k}{i} p^i (1 - p)^{k-i}$.

Démonstration.

Deux cas se présentent.

- Si $k < i$ alors :

$$\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = 0$$

En effet, on ne peut obtenir plus de boules blanches (ici i) que de tirages effectués (ici k).

Si $k < i$, $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = 0$.

- Si $k \geq i$
 - × Si l'événement $\{X = k\}$ est réalisé, c'est que la variable X prend la valeur k , c'est-à-dire qu'on a tiré la boule numérotée k dans l'urne U .
 - × Dans ce cas, l'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir une boule blanche). La variable aléatoire Y prend pour valeur le nombre de succès obtenu lors de cette expérience. Ainsi, $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = \mathbb{P}(\{Z = i\})$ où $Z \sim \mathcal{B}(k, p)$.

$$\text{Si } 0 \leq i \leq k, \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}.$$

□

4. Dans les deux questions à venir, on écrira **soigneusement** la formule des probabilités totales (à l'aide du même système complet d'événements correctement choisi).

a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égale à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$$

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$.
En effet, lors de l'expérience, on peut piocher au maximum n boules blanches dans l'urne V (puisque l'on fait au maximum n tirages).
- Démontrons : $\llbracket 0, n \rrbracket \subset Y(\Omega)$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Si on tire initialement la boule k dans l'urne U , alors on effectue k tirages dans l'urne V .
Si ces tirages amènent tous une boule blanche alors Y prend la valeur k .

$$Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est demandé de « Justifier » le résultat. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles.
- Pour une question de recherche d'ensemble image, fournir le résultat démontre généralement la bonne compréhension. Ici, le résultat est formulé dans la question ce qui oblige à détailler la réponse.
- Il n'est donc pas si simple de connaître le niveau de détail attendu. A minima, il faut écrire :
Au minimum, on ne tire aucune boule blanche dans l'urne.
Au maximum, on peut tirer n boules blanches dans l'urne.
Tous les résultats intermédiaires étant possibles, on en conclut : $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
- Si on ne précise pas que les résultats intermédiaires sont possibles, on démontre essentiellement : $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$. Dans ce corrigé, on détaille l'inclusion réciproque. Il s'agit de démontrer que pour toute valeur k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, il existe une issue de l'expérience ω telle que $Y(\omega) = k$. Autrement dit, on démontre, en déroulant l'expérience, que la variable aléatoire Y peut prendre la valeur k .

- La famille $(\{X = k\})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{Y = 0\}) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{Y = 0\} \cap \{X = k\}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = 0\}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X = k\}) \times \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = 0\}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \binom{k}{0} p^0 (1-p)^{k-0} && (\text{car } X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1-p)^k \\
 &= \frac{1}{n} \frac{(1-p)^1 - (1-p)^{n+1}}{1 - (1-p)} && (\text{en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique}) \\
 &= \frac{1}{n} \frac{(1-p)(1 - (1-p)^n)}{1 - (1-p)}
 \end{aligned}$$

On obtient bien : $\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}.$

□

Commentaire

- Cette question ne présente pas de difficulté méthodologique puisque l'énoncé précise la démarche à suivre : il s'agit d'appliquer la formule des probabilités totales
- Profitons-en pour rappeler que si :
 - × $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ est un événement,
 - × la famille $(\mathbf{B}_k)_{k \in K}$ est un système complet d'événements,
 alors, par formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(\mathbf{A}) = \sum_{k \in K} \mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_k)$
- En particulier, si le système complet d'événements considéré est constitué :
 - × de m événements, alors la FPT produit une somme de m termes.
 - × de 2 événements, alors la FPT produit une somme de 2 termes.
 - × d'une infinité d'événements ($K = \mathbb{N}$ par exemple), alors la FPT produit une somme d'une infinité de termes.
- Dans la question, on applique cette formule à $\mathbf{A} = \{Y = 0\}$ avec $K = \{1, \dots, n\}$ et enfin $\mathbf{B}_1 = \{X = 1\}, \dots, \mathbf{B}_n = \{X = n\}$.

- b) Écrire, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}(\{Y = i\})$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Démonstration.

- La famille $(\{X = k\})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

Ainsi, par formule des probabilités totales, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{Y = i\}) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{Y = i\} \cap \{X = k\}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = i\}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X = k\}) \times \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) \quad (\text{car } X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \geq i}}^n \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k < i}}^n 0 \quad (\text{d'après la question 3}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}
 \end{aligned}$$

On obtient bien la forme souhaitée pour $\mathbb{P}(\{Y = i\})$.

Commentaire

- Il convient de rappeler que pour utiliser un résultat, il faut vérifier que l'on se situe dans le cadre d'application de ce résultat.
- La formule démontrée en question 3 fournit la valeur de $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\})$. La formule étant définie par cas, il convient de vérifier, si l'on souhaite remplacer $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\})$ par sa valeur, de vérifier dans quel cas on se situe. Cela se traduit dans la question par un découpage de la somme.
- Détaillons enfin les indices de la nouvelle somme. On somme initialement pour toute valeur k comprise dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère de plus la contrainte $k \geq i$. On obtient donc une sommation pour toute valeur k comprise dans $\llbracket i, n \rrbracket$. □