
Interrogation de cours 14

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

1. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ (on notera dans la suite $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire).

2. Parenthèse

Soit E un espace préhilbertien RÉEL.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F est de dimension finie notée $m \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \dots, e_m)$ une base ORTHONORMÉE de F .

Quelle formule (portant sur les vecteurs de E) permet d'affirmer : $E = F \oplus F^\perp$?
(on ne demande pas de justification)

3. Si $R \in \mathbb{R}_2[X]$ est un polynôme de E , que vaut : $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 \frac{(R(t) - at - b)^2}{1+t^2} dt$?
(on n'attend pas de justification, seulement une définition / formule)

4. On note $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $R(X) = X^2$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F .
Quelle propriété possède le polynôme $R - p_F(R)$? (on n'attend pas de justification)

5. En remarquant que les fonctions $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{t^3}{1+t^2}$ sont impaires sur $[-1, 1]$, donnez la valeur de $\int_{-1}^1 \frac{t}{1+t^2} dt$ et $\int_{-1}^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt$. On admet : $\int_{-1}^1 \frac{t^0}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ et $\int_{-1}^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 - \frac{\pi}{2}$.

6. Déterminer $p_F(R)$.

7. En déduire $d(R, F)$.