

Interrogation de cours 14

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par :

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle &: \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t) Q(t)}{1+t^2} dt\end{aligned}$$

1. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ (on notera dans la suite $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire).

Démonstration.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}\langle Q, P \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{Q(t) \times P(t)}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times Q(t)}{1+t^2} dt && \text{(car la loi } \times \text{ est commutative)} \\ &= \langle P, Q \rangle\end{aligned}$$

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite

Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}\langle P, \mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times \left(\mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 \right)(t)}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times \left(\mu_1 \times Q_1(t) + \mu_2 \times Q_2(t) \right)}{1+t^2} dt && \text{(par linéarité de l'évaluation en un point)} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\mu_1 P(t) \times Q_1(t) + \mu_2 P(t) \times Q_2(t)}{1+t^2} dt && \text{(par distributivité de la loi } \times \text{ sur la loi } +) \\ &= \mu_1 \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times Q_1(t)}{1+t^2} dt + \mu_2 \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times Q_2(t)}{1+t^2} dt && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \mu_1 \langle P, Q_1 \rangle + \mu_2 \langle P, Q_2 \rangle\end{aligned}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant :

× symétrique,

× linéaire à droite,

elle est linéaire à gauche.

On en conclut que c'est une forme (c'est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$) bilinéaire symétrique.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

× Tout d'abord :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)P(t)}{1+t^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{1+t^2} dt$$

Pour tout $t \in [-1, 1]$, $(P(t))^2 \geq 0$ et $1+t^2 \geq 0$.

Par croissance de l'intégrale :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{1+t^2} dt \geq 0$$

× Supposons maintenant : $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{1+t^2} dt = 0$. Démontrons : $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

La fonction $t \mapsto \frac{(P(t))^2}{1+t^2}$ est :

- × positive sur $[-1, 1]$,
- × continue sur $[-1, 1]$,
- × d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$.

On en conclut que cette fonction est nulle sur $[-1, 1]$.

$$\forall t \in [-1, 1], \frac{(P(t))^2}{1+t^2} = 0$$

$$\text{donc } \forall t \in [-1, 1], (P(t))^2 = 0 \quad (\text{car } 1+t^2 \neq 0)$$

$$\text{donc } \forall t \in [-1, 1], P(t) = 0$$

donc P admet une infinité de racines

$$\text{donc } P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et définie-positive. C'est donc bien un produit scalaire.

□

2. Parenthèse

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien RÉEL.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F est de dimension finie notée $m \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \dots, e_m)$ une base ORTHONORMÉE de F .

Quelle formule (portant sur les vecteurs de E) permet d'affirmer : $E = F \oplus F^\perp$?

Démonstration.

$$\forall x \in E, x = \left(\sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right) + \left(x - \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right)$$

où $p_F(x) = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \in F$ est la projection orthogonale de x sur le sous-espace vectoriel F ,
et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Même si ce n'était pas demandé dans le sujet, on place ci-dessous la démonstration de cette formule.

Il s'agit de démontrer la propriété : $\forall x \in E, \exists!(u, v) \in F \times F^\perp, x = u + v$.

Soit $x \in E$.

• Analyse :

On suppose qu'il existe $(u, v) \in F \times F^\perp$ tel que $x = u + v$.

Comme $u \in F$ et $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de F , alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } j \in \llbracket 1, m \rrbracket : \quad \langle x, e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i + v, e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle + \langle v, e_j \rangle \quad (\text{car } v \in F^\perp) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta_{i,j} \quad (\text{car } (e_1, \dots, e_m) \text{ est une base orthonormale}) \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } u = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \quad \text{et} \quad v = x - u.$$

• Synthèse :

Notons $u = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$ et $v = x - u$. Alors :

$$\times \quad x = u + v$$

$$\times \quad \text{Comme } (e_1, \dots, e_m) \text{ est une base de } F, \text{ alors } u = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \in F.$$

$$\times \quad \text{Il reste alors à vérifier : } v \in F^\perp. \text{ Autrement dit, il s'agit de démontrer :}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \langle v, e_j \rangle = 0$$

Soit $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \langle v, e_j \rangle &= \left\langle x - \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \cdot e_i, e_j \right\rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \quad (\text{par linéarité à gauche du produit scalaire}) \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_j \rangle \quad (\text{car } (e_1, \dots, e_m) \text{ est une base orthonormale}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

3. Si $R \in \mathbb{R}_2[X]$ est un polynôme de E , que vaut : $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 \frac{(R(t) - at - b)^2}{1 + t^2} dt$?
(on n'attend pas de justification, seulement une définition / formule)

Démonstration.

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 \frac{(R(t) - at - b)^2}{1 + t^2} dt &= \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left\| R(X) - aX - b \right\|^2 \\ &= \inf_{Q \in \mathbb{R}_1[X]} \left\| R - Q \right\|^2 \\ &= \left(\inf_{Q \in \mathbb{R}_1[X]} \left\| R - Q \right\| \right)^2 \\ &= \left(d(R, \mathbb{R}_1[X]) \right)^2 \end{aligned}$$

□

4. On note $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $R(X) = X^2$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F .
Quelle propriété possède le polynôme $R - p_F(R)$? (on n'attend pas de justification)

Démonstration.

$$R - p_F(R) \in F^\perp$$

□

5. Déterminer $p_F(R)$.

Démonstration.

- Même si ce n'était pas demandé, déterminons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{t^0}{1+t^2} dt &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= [\arctan(t)]_{-1}^1 \\ &= \arctan(1) - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt &= \int_{-1}^1 \frac{(1+t^2) - 1}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 1 dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- Par définition, $p_F(R) \in \mathbb{R}_1[X]$.
Il existe donc $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, $p_F(R) = a_0 + a_1 X$.

$$p_F(R) \in F \Leftrightarrow R - p_F(R) \in F^\perp$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\langle R - p_F(R), 1 \rangle = 0 \\ \text{et } &\langle R - p_F(R), X \rangle = 0 \end{aligned} \quad \text{(car } (1, X) \text{ est une famille} \\ &\hspace{10em} \text{génératrice de } F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\langle X^2 - (a_0 + a_1 X), 1 \rangle = 0 \\ \text{et } &\langle X^2 - (a_0 + a_1 X), X \rangle = 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\langle X^2 - a_1 X - a_0, 1 \rangle = 0 \\ \text{et } &\langle X^2 - a_1 X - a_0, X \rangle = 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\langle a_1 X + a_0, 1 \rangle = \langle X^2, 1 \rangle \\ \text{et } &\langle a_1 X + a_0, X \rangle = \langle X^2, X \rangle \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} a_0 &= 2 - \frac{\pi}{2} \\ \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a_1 &= 0 \end{cases}$$

$$(p_F(R))(X) = a_0 + a_1 X = \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)$$

□

6. En déduire $d(R, F)$.