

Interrogation de cours 15

1. On définit la suite (a_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} 3^n & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Démonstration.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

• Dans toute la suite, on définit les suites $(u_n(x_0))$ et $(v_n(x_0))$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x_0) = a_{2n+1} x_0^{2n+1} \quad \text{et} \quad v_n(x_0) = a_{2n} x_0^{2n}$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| &= \frac{|u_{n+1}(x_0)|}{|u_n(x_0)|} \\ &= \frac{|a_{2(n+1)+1} x_0^{2(n+1)+1}|}{|a_{2n+1} x_0^{2n+1}|} \\ &= \frac{|a_{2n+3}| \times |x_0|^{2n+3}}{|a_{2n+1}| \times |x_0|^{2n+1}} \\ &= \frac{|a_{2n+3}|}{|a_{2n+1}|} |x_0|^2 \\ &= \frac{|3^{2n+3}|}{|3^{2n+1}|} |x_0|^2 && (\text{car } 2n+1 \text{ et } 2n+3 \text{ sont} \\ &&& \text{des entiers impairs}) \\ &= \frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}} |x_0|^2 \\ &= 3^2 |x_0|^2 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3^2 |x_0|^2 \end{aligned}$$

Deux cas se présentent.

× Si $3^2 |x_0|^2 < 1$, c'est-à-dire $|x_0|^2 < \frac{1}{3^2}$ ou encore $|x_0| < \frac{1}{3}$
alors, par règle de d'Alembert, la série numérique $\sum a_{2n+1} x_0^{2n+1}$ est absolument convergente.

On en déduit : $R_{cv} \left(\sum a_{2n+1} x^{2n+1} \right) \geq \frac{1}{3}$.

× Si $3^2 |x_0|^2 > 1$, c'est-à-dire $|x_0| > \frac{1}{3}$
alors, par règle de d'Alembert, la série numérique $\sum a_{2n+1} x_0^{2n+1}$ est grossièrement divergente.

On en déduit : $R_{cv} \left(\sum a_{2n+1} x^{2n+1} \right) \leq \frac{1}{3}$.

Finalement : $R_{cv} \left(\sum a_{2n+1} x^{2n+1} \right) = \frac{1}{3}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{v_{n+1}(x_0)}{v_n(x_0)} \right| &= \frac{|v_{n+1}(x_0)|}{|v_n(x_0)|} \\
 &= \frac{|a_{2(n+1)} x_0^{2(n+1)}|}{|a_{2n} x_0^{2n}|} \\
 &= \frac{|a_{2n+2}| \times |x_0|^{2n+2}}{|a_{2n}| \times |x_0|^{2n}} \\
 &= \frac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n}|} |x_0|^2 \\
 &= \frac{\left| \frac{2n+2}{2} \left(\frac{2n+2}{2} - 1 \right) \right|}{\left| \frac{2n}{2} \left(\frac{2n}{2} - 1 \right) \right|} |x_0|^2 \quad (\text{car } 2n \text{ et } 2n+2 \text{ sont des entiers pairs}) \\
 &= \frac{(n+1)n}{n(n-1)} |x_0|^2 \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} |x_0|^2 \\
 &= |x_0|^2 \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x_0|^2
 \end{aligned}$$

Deux cas se présentent.

- × Si $|x_0|^2 < 1$, c'est-à-dire $|x_0| < 1$

alors, par règle de d'Alembert, la série numérique $\sum a_{2n} x_0^{2n}$ est absolument convergente.

On en déduit : $R_{cv} \left(\sum a_{2n} x^{2n} \right) \geq 1$.

- × Si $|x_0|^2 > 1$, c'est-à-dire $|x_0| > 1$

alors, par règle de d'Alembert, la série numérique $\sum a_{2n} x_0^{2n}$ est absolument convergente.

On en déduit : $R_{cv} \left(\sum a_{2n} x^{2n} \right) \leq 1$.

Finalement : $R_{cv} \left(\sum a_{2n} x^{2n} \right) = 1$.

- Comme $\frac{1}{3} \neq 1$, alors, par argument de somme :

$$R_{cv} \left(\sum a_n x^n \right) = \min \left(\frac{1}{3}, 1 \right)$$

Finalement : $R_{cv} \left(\sum a_n x^n \right) = \frac{1}{3}$.

Commentaire

- L'une des difficultés concernant le chapitre sur les séries entières est la bonne compréhension de l'objet série entière. On note de la même manière une série entière $\sum a_n x^n$ (c'est une série de fonctions) et la série numérique $\sum a_n x^n$. Afin de différencier ces deux objets, on introduit dans l'énoncé une variable notée x_0 (et pas x). Il est conseillé de faire de même et de spécifier, avant l'écriture du symbole $\sum$, si l'on a affaire à une série numérique (qui peut être (grossièrement) divergente ou (absolument) convergente) ou à une série entière (dont les modes de convergence sont

Commentaire

- Il convient de NE PAS écrire $R_{cv} \left(\sum a_n x_0^n \right)$. En effet, déterminer le rayon de convergence d'une série numérique n'a aucun sens. □

b) Déterminer une expression simple de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ (il est conseillé de découper la somme suivant la parité de l'indice de sommation)

Démonstration.

Soit $x \in] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_{2i} x^{2i} + \sum_{j=0}^{+\infty} a_{2j+1} x^{2j+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2i}{2} \left(\frac{2i}{2} - 1 \right) x^{2i} + \sum_{j=0}^{+\infty} 3^{2j+1} x^{2j+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1) (x^2)^i + 3x \sum_{j=0}^{+\infty} (3^2)^j (x^2)^j \\
 &= \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1) (x^2)^i + 3x \sum_{j=0}^{+\infty} (3x^2)^j && \text{(car les 2 premiers éléments de la somme de gauche sont nuls)} \\
 &= \frac{2}{(1-x^2)^3} + 3x \frac{1}{1-(3x^2)} && \text{(par formule de la somme géométrique et de la somme géométrique dérivée deuxième)}
 \end{aligned}$$

$$\forall x \in] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[, f(x) = \frac{2}{(1-x^2)^3} + 3x \frac{1}{1-(3x^2)}$$

□

2. On souhaite déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \ln(n) x^n$.

a) Rappeler la définition de rayon de convergence pour une série entière de la variable réelle.

Démonstration.

- On note E_a l'ensemble défini par :

$$\begin{aligned}
 E_a &= \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } (a_n r^n) \text{ est bornée} \} \\
 &= \{ |z| \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } (a_n z^n) \text{ est bornée} \}
 \end{aligned}$$

- On appelle rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ défini par :

$$\times R = \sup (E_a) \text{ si l'ensemble } E_a \text{ est majoré,}$$

$$\times R = +\infty \text{ si l'ensemble } E_a \text{ n'est pas majoré.}$$

□

b) En raisonnant sur la suite $(\ln(n))$, majorer R .

Démonstration.

- La suite $(\ln(n) 1^n)$ (autrement dit la suite $(\ln(n))$) n'est pas bornée.
- On en déduit : $R_{cv} \left(\sum \ln(n) z^n \right) \leq 1$.

$$R \leq 1$$

□

c) Rappeler (sans démonstration), l'inégalité de convexité classique vérifiée par la fonction $\ln$.

Démonstration.

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$$

□

d) À l'aide de la question précédente (utilisée judicieusement), minorer R .

Démonstration.

- Remarquons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |\ln(n)| &= \ln(n) \\ &\leq n - 1 && (d'après l'inégalité de la question précédente en $x = n > 0$) \\ &\leq n \end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |\ln(n)| \leq n$.

- On en déduit : $R_{cv} \left(\sum \ln(n) x^n \right) \geq R_{cv} \left(\sum n x^n \right) = R_{cv} \left(\sum x^n \right) = 1$.

$$\text{On en conclut : } R_{cv} \left(\sum \ln(n) x^n \right) = 1.$$

□