

Interrogation de cours 16

On considère l'équation différentielle :

$$(1 - 4x) y' - 2y = 0 \quad (E)$$

Pour ce faire, on se propose d'étudier les solutions développables en série entière de cette équation.

1. On suppose qu'il existe une fonction f solution de (E) et développable en série entière.

Autrement dit, il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, telle que :

× f est solution de E ,

× $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Démontrer (avec soin) par récurrence, à l'aide de la relation précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \binom{2n}{n} a_0$.

(tourner la page pour finir)

2. Réciproquement, on note $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^n$.

b) Comment démontrer que la fonction g est solution de (E) ?

3. Conclure de cette étude l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.