

Interrogation de cours 1

1. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{2^n}{n!}$. On utilisera la règle de d'Alembert.

Démonstration.

On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n}{n!}$.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \\ &= \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad (\text{car : } \forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq 0) \\ &= \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} \\ &= \frac{2 \times \cancel{2^n}}{(n+1) \times \cancel{n!}} \times \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} \end{aligned}$$

- Finalement :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \in [0, 1[$$

Ainsi, par règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente.

□

2. Déterminer la nature de la série $\sum \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$. On déterminera un équivalent du terme général.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$e^x = 1 + x + O_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\text{donc } e^x - 1 = x + O_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

En particulier : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

- Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit :

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Finalement :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq 0$$

$$\times e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$\times$ La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente en tant que série de Riemann d'exposant 1 (>1).

Ainsi, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ est (absolument) convergente.

Commentaire

- Il est précisé dans la question qu'il faut déterminer un équivalent de la suite $\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
L'équivalent :

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

est usuel et peut être utilisé directement. Il est aussi possible, comme détaillé dans la correction, de démontrer cet équivalent en détaillant le développement limité de la fonction $\exp$ au voisinage de 0.

- Il ne faut surtout pas écrire :

~~$$e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1$$~~

Si le résultat obtenu est correct, la manière d'y parvenir ne l'est pas. Il convient de retenir qu'on NE peut PAS sommer des équivalents. Si on est tenté de le faire, c'est certainement qu'il faut passer par un développement limité (comme cela est détaillé dans la correction).

- On aurait aussi pu présenter le développement limité sous la forme :

$$e^x = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

L'utilisation de la notation $O_{x \rightarrow 0}(x^2)$ n'était pas utile ici mais c'est plutôt un bon réflexe car cela permet de « gagner un rang ». L'écriture $O_{x \rightarrow 0}(x^2)$ englobe tous les termes qui sont, au pire, de l'ordre de x^2 (au voisinage de 0, cela correspond aux termes en x^2 , en x^3 , en x^4 etc.). □

3. On se propose de déterminer la nature de la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

a) La série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ est-elle absolument convergente ? Justifier.

Démonstration.

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq 0$$

$$\times \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

$\times$ La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente en tant que série de Riemann d'exposant 1 (>1).

Ainsi, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs,
la série $\sum \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right|$ est divergente. Autrement dit,
la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ N'est PAS absolument convergente.

□

b) Déterminer le développement asymptotique, à l'ordre 3, de la suite $\left(\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) && \text{(présentation qui peut être utilisée)} \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + O_{x \rightarrow 0}(x^3) && \text{(présentation à préférer pour « gagner un rang »)} \end{aligned}$$

- Comme $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)^2 + O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right) \end{aligned}$$

Finalement : $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right).$

Commentaire

- Formellement, on remplace le x de la première écriture par $\frac{(-1)^n}{n}$.
En agissant ainsi, on obtient alors, en fin de développement asymptotique :

$$O_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{(-1)^n}{n} \right)^3 \right)$$

Remarquons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\frac{(-1)^n}{n} \right)^3 = \frac{((-1)^n)^3}{n^3} = \frac{(-1)^n}{n^3}$$

En effet : $((-1)^n)^3 = (-1)^{3n} = ((-1)^3)^n = (-1)^n$.

- Dans le corrigé il est écrit : $O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right)$ en lieu et place de $O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^3} \right)$. Il n'est pas difficile de démontrer que si une suite (u_n) est dominée par la suite $\left(\frac{1}{n^3} \right)$, elle l'est aussi par la suite $\left(\frac{1}{n^3} \right)$ (il suffit de se rendre compte que le quotient est borné).
On en profite pour rappeler qu'on peut faire disparaître les coefficients réels non nuls qui apparaissent à l'intérieur d'un $O_{n \rightarrow +\infty}(\dots)$.

□

- c) En conclure, par argument de somme, la nature de la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.
(on rappellera précisément les hypothèses du critère spécial des séries alternées)

Démonstration.

- Dans la suite, on introduit les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right),$$

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = u_n - v_n,$$

de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n + w_n$.

- Déterminons la nature de la série $\sum v_n$.

(i) La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée.

(ii) La suite $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|\right)$ est décroissante.

(iii) $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, par critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

- Déterminons la nature de la série $\sum w_n$.

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$\times |w_n| = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ En effet :}$$

$$\begin{aligned} w_n &= u_n - v_n \\ &= \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\text{Et donc : } |w_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\times$ La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ est (absolument) convergente.

Finalement, par argument de somme (le terme général de la série $\sum u_n$ apparaît comme somme de termes généraux de séries convergentes), la série $\sum u_n$ est convergente.

□